

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# نصاب فی بیاضی

حصہ اول

برائے طبیعیات بی۔ ایس سی

تالیف

مولوی محمد عبدالرحمن خان صاحب بی۔ ایس سی آنرز (لندن)

اسٹوڈنٹ آف میڈیسن کالج آف سائنس (لندن) فیلو آف میڈیسنل سوسائٹی۔ فیلو آف وی فزیکل سوسائٹی لندن

سابق صدر کلیہ جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۵۵ھ ۱۳۴۵ھ ۱۹۳۶ء

طبع و نشر دارالکتاب اسلام آباد



# دیباجہ

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی کی تیاری میں زیادہ تر اس امر کی کوشش کی گئی ہے کہ جن طلبہ کا اصل مقصد طبیعیات ہو اور جو اعلیٰ ریاضی پر زیادہ وقت نہ صرف کر سکتے ہوں ان کے لیے ایک ایسی جامع لیکن مختصر کتاب لکھی جائے جس کے مطالعہ سے انہیں ریاضی کے ضروری مضامین اور مفید طریقوں سے کافی واقفیت حاصل ہو سکے اور آگے چل کر شوق پیدا ہو کہ اساتذہ فن کی مستند کتابوں کا تفصیلی مطالعہ کیا جائے۔

اس کے لکھنے میں مؤلف کو بڑی احتیاط برتنی پڑی۔ ایک طرف نصاب پورا کرنا تھا تو دوسری طرف کتاب کا حجم بھی گھٹانا تھا۔ مسائل کی تفہیم کے ساتھ چیدہ چیدہ مشقی سوالات کا شامل کرنا بھی ضروری تھا نہ اس قدر زیادہ کہ طالب علم گھبرا جائے اور نہ اتنے کم کہ مشق کافی نہ ہو۔ انگریزی فرانسیسی اور جرمن زبانوں میں بھی اس طرز کی کتابیں بہت کم ہیں۔ اور جو ہیں ان پر کسی نہ کسی پہلو سے اعتراض ہوا ہے۔ جیسے جیسے کالم کی اہمیت معلوم ہو رہی ہے اعتراض کم ہوتے آرہے ہیں۔ کسی خاص کتاب کا اگر ترجمہ کیا جاتا تو نہ نصاب ہی پورا ہوتا اور نہ حجم کم رہ سکتا۔



اس لیے مختلف درسی کتابوں سے مدد لینے کی ضرورت محسوس ہوئی جس سے اول  
کی تالیف میں جن کتابوں سے خاص طور پر استفادہ کیا گیا اُن کے نام  
درج ذیل ہیں :-

1. F. G. W. BROWN'S Higher Mathematics.
2. F. S. WOODS AND F. H. BAILEY'S A Course in Mathematics,  
2 Volumes.
3. HALL AND KNIGHT'S Higher Algebra.
4. C. SMITH'S Co-ordinate Geometry.
5. W. P. MILNE'S Higher Algebra.
6. D. HUMPHREY'S Advanced Mathematics.
7. LONEY'S Plane Trigonometry Part II.
8. H. S. CARSLAW'S Plane Trigonometry.

محمد عبدالرحمن خاں

# فہرست امین

نصاب فیلی ریاضی - برائے طبیعیات بی۔ ایس سی جامہ عثمانیہ  
حصہ اول

صفحہ	مضمون	نفاذ
۱	پہلا باب مسئلہ ثنائی	۱
۲۸	دوسرا باب جزوی کسور	۲
۲۴	تیسرا باب مقطعات	۳
۶۶	چوتھا باب مسئلہ قوتہ نما - لوکارتم اور لوکارتمی سلسلہ	۴
۸۳	پانچواں باب ڈی مؤاثر کا مسئلہ اور اس کے استعمال	۵
۱۱۰	چھٹا باب قائم اور قطبی متحدہ - اُن کا استحالة اور خط مستقیم کی مساواتیں	۶
۱۴۲	ساتواں باب دائرہ کی مساواتیں	۷
۱۷۰	آٹھواں باب خط مکانی کی مساواتیں	۸
۱۸۷	نواں باب خط ناقص کی مساواتیں	۹
۲۱۶	دسواں باب خط زائد کی مساواتیں	۱۰
۲۳۲	گیارہواں باب ماسک کو قطب ان کر مخروطی کی مساوات	۱۱
۲۴۳	بارہواں باب درجہ دوم کی عام مساوات	۱۲
۲۵۸	تیرہواں باب کعبی اور عددی سرور کی مساواتوں کا عملی حل	۱۳
۲۷۳	چودھواں باب مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع، جب لا اور جم لا کے سلسلے اور زائیدی تقاضا	۱۴



بسم اللہ الرحمن الرحیم

# نصاب ریاضی

برائے

طبیعیات۔ بی۔ اے

پہلا باب

مسئلہ شنائی

BINOMIAL THEOREM

۱۔ مسئلہ شنائی سے مراد ایک ضابطہ ہے جس کے ذریعہ کوئی دورقی جملہ  
(جو  $(a + b)^n$  کی شکل کا ہو کسی بھی قوت تک بلند کیا جاسکتا ہے یعنی  $(a + b)^n$   
کا پھیلاؤ ہے جس میں  $n$  کوئی ایک قوت نہا ہے۔  
پہلے ہم فرض کریں گے کہ  $n$  ایک مثبت اور صحیح عدد ہے۔

( $a + b$ )<sup>n</sup> واضح ہے کہ  $n$  اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں  
ہر ایک ( $a + b$ ) کے مساوی ہے اور اس پھیلاؤ میں ہر ایک رقم  $n$   
ابعاد کی ہے اس لئے کہ وہ  $n$  حروف کو  $n$  اجزائے ضربی میں سے ایک  
ایک حرف کو لے کر آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے چنانچہ ہر وہ  
رقم جس میں  $a$  یا  $b$  شریک ہے اس طرح بنتی ہے کہ کسی بھی  $n$  اجزائے  
ضربی میں سے  $a$  کو لیتے ہیں اور بقیہ  $n$ ۔  $a$  اجزائے ضربی میں سے  $b$  کو لیتے ہیں۔  
اس لئے  $a^n$  والی رقموں کی تعداد  $n$  اشیاء میں سے  $a$  اشیاء کے طریقہ

انتخاب کی تعداد کے مساوی ہونی چاہیے۔ یعنی  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  کا سر صبح رہے پس اس کو  
 علی الترتیب  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$  ن قیمتیں دینے سے جملہ کی تمام رقموں کے

سر حاصل ہو جاتے ہیں۔ لہذا  
 $(1+2+3+\dots+n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$   
 کیونکہ صبح اور صبح دونوں کی قیمت ۱ کے مساوی ہے۔

۴۔ مسئلہ ثنائی کی سادہ ترین شکل  $(1+2+3+\dots+n)$  کا پھیلاؤ ہے۔ یہ شکل پہلی  
 فصل کے عام مضابطہ میں لا کے بجائے ۱ اور ۲ کے بجائے لا لکھنے سے حاصل  
 ہوتی ہے۔ لہذا

$$(1+2+3+\dots+n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-2)}{2} + \dots + \frac{n(n-(n-1))}{2} + \frac{n(n-0)}{2}$$

ہے۔ جس میں  $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{2}$  عام رقم ہے۔

کسی بھی دو رقمی جملہ کی قوت کو بلند کر کے پھیلا نا مقصود ہو تو اس کا آسان  
 ترین طریقہ یہ ہوگا کہ اس دو رقمی جملہ کو ایسی شکل میں بدل دیا جائے جس کی  
 پہلی رقم اکائی ہو اور اس کے بعد مصرعہ بالا طریقہ سے اسے پھیلا دیا  
 جائے۔ مثلاً

$$(1 + \frac{1}{10})^n = \{ (1 + \frac{1}{10})^n \} = (1 + \frac{1}{10})^n$$

بنظر سہولت  $\frac{1}{10}$  کے عوض ۱ لکھ کر مسئلہ ثنائی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۳۔ طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ  $(1+2+3+\dots+n)$  کے پھیلاؤ میں جملہ  $1+2+3+\dots+n$   
 رقمیں ہوتی ہیں۔  $(1+2+3+\dots+n)$  میں رقم جو کہ عام رقم کہلاتی ہے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اور لا اور ۱ کو ان کے مناسب قوت نامہ دینے سے کوئی بھی معینہ رقم معلوم



تو اعظم سر تسبیح ہے اور جب  $n$  ایک طاق عدد ہوتا ہے تو تسبیح  $n-1$  اور تسبیح  $n+1$  اعظم اور مساوی ہوتے ہیں۔

۶۔ جملہ  $(n+1)$  کے پھیلاؤ میں اعظم رقم کی تعیین۔  
چونکہ  $(n+1) = n + 1$  اور  $(n+1)$  جملہ  $(1 + \frac{1}{n})$  کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم کو ضرب دیتا ہے اس لئے کافی ہوگا کہ آخر الذکر جملہ کے پھیلاؤ میں سب کے جڑی رقم دریافت کی جائے۔

فرض کرو کہ  $(r)$  ویں اور  $(r+1)$  ویں رقمیں کوئی سی دو متواتر قس ہیں۔ مسئلہ ثانی سے ظاہر ہے کہ آخر الذکر اول الذکر کو  $(\frac{n}{r+1} + 1)$  سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے یعنی  $(\frac{n}{r+1} + 1)$  سے ضرب دینے سے۔  
جزو ضربی  $\frac{n}{r+1} + 1$  اکٹھا جاتا ہے جیسے جیسے بڑھتا جاتا ہے۔  
پس  $(r+1)$  ویں رقم  $r$  ویں رقم سے ہمیشہ بڑی نہیں ہوتی بلکہ صرف اس وقت تک بڑی ہوتی ہے جس وقت تک کہ  $(\frac{n}{r+1} + 1) > \frac{n}{r}$  کی قیمت ۱ کے مساوی یا اس سے کم ہوتی ہے۔

$$\text{اب } (\frac{n}{r+1} + 1) > \frac{n}{r} \text{ اتنا حالیکہ } 1 - \frac{n}{r+1} < \frac{n}{r}$$

$$\text{یعنی } \frac{n}{r} < 1 + \frac{n}{r+1} \text{ یا } \frac{n}{r+1} < 1 + \frac{n}{r}$$

اگر  $\frac{n}{r+1}$  ایک صحیح عدد ہے تو اس کو  $p$  سے تعبیر کرو تب اگر  $p = r$  تو ضرب دینے والا جزو ۱ ہو جاتا ہے اور  $(p+1)$  ویں رقم  $p$  ویں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور پھر دو رقمیں بقیہ سب رقموں سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر  $\frac{n}{r+1}$  صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو  $q$  سے تعبیر کرو تو مصرعہ بالا شرط (یعنی  $\frac{n}{r+1} < r$ ) کی تکمیل کے ساتھ ساتھ رکی سب سے بڑی قیمت  $q$  ہو سکتی ہے۔ پس اعظم رقم  $(q+1)$  ویں رقم ہے چونکہ یہاں اعظم رقم سے مراد عدداً اعظم رقم ہے اس لئے  $(n+1)$









= ف (م + ن + پ + ..... ک رقوموں تک)  
م، ن، پ، ..... مقادیر میں سے ہر ایک کو  $\frac{1}{2}$  کے مساوی نو جہاں  
ہ اور ک مثبت صحیح اعداد ہیں

$$\therefore \left\{ \text{ف} \left( \frac{1}{2} \right) \right\} = \text{ف} (ہ)$$

مگر چونکہ ہ ایک مثبت صحیح عدد ہے ف (ہ) = (۱ + لا)  
 $\therefore \left\{ \text{ف} \left( \frac{1}{2} \right) \right\} = (۱ + لا)$

$$(۱ + ہ) \frac{1}{2} = \text{ف} \left( \frac{1}{2} \right)$$

لیکن ف (۱) = ۱ + ۱ + ۱ + ..... لا  $\frac{1}{2}$  (۱ -  $\frac{1}{2}$ )  
 $\therefore (۱ + لا) \frac{1}{2} = ۱ + ۱ + ۱ + ..... لا + \frac{1}{2} (۱ - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$

اس سے مسئلہ شنائی کا ثبوت ہم پہنچایا جاتا ہے جبکہ قوت نا کوئی بھی مثبت  
کسر ہوتی ہے۔

واضح ہو کہ مسئلہ شنائی کے ہر دور قومی جملہ کو ہم (۱ + لا) کی صورت میں  
ڈھال سکتے ہیں پس اگر (۱ + لا) کے لئے جویات گناہت کی جاتی ہے اس کا  
الفاظ عام ہوتا ہے۔  
صورت (ب)۔ جبکہ قوت نا کوئی بھی منفی مقدار ہے۔

یہ ثابت ہو چکا ہے کہ ف (م) = ف (ن) = ف (م + ن)  
م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے۔ اگر م کے عوض ن لکھا جائے جس میں  
ن مثبت ہے تو

ف (-ن) = ف (ن) = ف (-ن + ن) = ف (۰) = ۱  
اس لئے کہ پھیلاؤ کے سلسلہ کی تمام رقمیں سوائے پہلی رقم کے  
کا عدم ہو جاتی ہیں۔

$$\therefore \text{ف} (-ن) = \frac{1}{\text{ف} (ن)}$$

لیکن  $f(n) = (n+1)^k$ ،  $n$  کی کسی بھی مثبت قیمت کے لئے

$$f(n) = \frac{1}{k(n+1)}$$

$$f(n) = (n+1)^k$$

لیکن اگر دوسرے قرار داد  $f(n)$  سلسلہ

$$1 + f(n) + \frac{f(n)f(n-1)}{2 \times 1} + \dots$$

$$= (n+1)^k = 1 + f(n) + \frac{f(n)f(n-1)}{2 \times 1} + \dots$$

جس سے مسئلہ ثنائی کا کسی بھی منفی قوت  $n$  کے لئے ثبوت مہیا ہو جاتا ہے۔  
پس مسئلہ ثنائی مکمل طور پر ثابت ہو جاتا ہے۔

۱۲- واضح ہو کہ مصرعہ بالا ثبوت میں جو "معادل شکلوں کے استقلال" کے اصول پر مبنی ہے سلسلوں کے استنتاج و اتساع کی بحث نہیں کی گئی۔ ہم اس پہلو پر ایک سرسری نظر ڈالنا چاہتے ہیں۔

$f(n)$  (م) کو پھیلانے سے جو جملہ حاصل ہوتا ہے اس کی رقموں کی تعداد متناہی ہوتی ہے جب تک کہ  $m$  ایک مثبت صحیح عدد ہے لیکن دوسری تمام صورتوں میں جیسا کہ اس فصل کے آخری حصہ میں دیکھینگے اس جملہ کی رقموں کی تعداد نامتناہی ہوتی ہے۔ پس یہ معلوم ہونا چاہیے کہ  $f(n) \times f(m) = f(n+m)$  لکھنے ہیں تو اس کا مفہوم کیا ہے۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ جب  $f(n) > f(m)$ ،  $f(n)$  اور  $f(m)$  یہ تینوں سلسلے مستند قیام ہوتے ہیں۔ اور  $f(n+m)$  {  $f(n) \times f(m)$  } کا صحیح حسابی معادل ہوتا ہے۔ لیکن جب  $f(n) < f(m)$  تو یہ تینوں سلسلے تسخیر ہوتے ہیں، اور ہم صرف یہی دعوئے کر سکتے ہیں کہ اگر ہم  $f(n)$  اور  $f(m)$  کے ذریعہ جن سلسلوں کی تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کو ایک دوسرے سے ضرب دیں تو حاصل ضرب

کی پہلی ر رقیس 'ن' (م + ن) سے تعبیر ہونے والے سلسلہ کی پہلی  
 ر رتوں سے مطابقت رکھتی ہیں۔ ر کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو۔  
 استنتاج کے امتحان کے سب سے زیادہ موثر طریقوں میں  
 ڈا لمبیر (D'Alembert) کا طریقہ ہے جو سلسلہ کی متواتر رتوں کی  
 نسبت کے امتحان پر مبنی ہے۔ اگر  $r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$  ایک  
 نامتناہی سلسلہ ہے تو وہ مستحق یا قسح ہوگا بلحاظ اس کے کہ نہایت  
 عدداً اسے کم یا زیادہ ہے۔ لیکن اگر وہ ۱ ہو تو مزید امتحان کی ضرورت ہوگی۔  
 ظاہر ہے کہ ن جب کسری یا منفی ہوتا ہے تو (۱ + ن) کے پھیلاؤ میں عام  
 رقم کو پوری صراحت کے ساتھ

$$ن (ن-۱) (ن-۲) \dots (ن-۱+۱) ۱$$

لکھنا چاہیے اس لئے کہ علامت صحیح اب استعمال نہیں کی جاسکتی۔  
 معیناً عام رقم کا سرکشی محدود نہیں ہو سکتا ہے جب تک کہ اس کے  
 شمار کنندہ کے اجزاء کے ضربی میں سے ایک جزو صفر نہ ہو۔ پس یہ سلسلہ نہوں  
 رقم پر اس وقت ختم ہو جائیگا جبکہ  $ن + ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن = ۱$ ۔ لیکن  
 چونکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ یہ مساوات صرف اسی وقت ممکن ہوگی جبکہ  
 ن بھی ایک مثبت اور صحیح عدد ہوگا۔ پس اس سے واضح ہے کہ مسئلہ ثانی  
 کے ذریعہ پھیلاؤ رتوں کی محدود تعداد میں (یعنی  $ن + ۱$  رتوں تک) صرف  
 ایسی صورت میں ہوتا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے لیکن بقیہ  
 تمام صورتوں میں رتوں کی تعداد نامتناہی ہوتی ہے۔

## سوالات (ب)

(۱) بتاؤ کہ (۱-ن) کو جب مسئلہ ثانی کے ذریعہ پھیلاتے ہیں تو اس کی  
 تمام رقیس بالآخر ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں۔ دریافت کرو کہ وہ علامت

کیا ہے، لا کہاں ثبت ہے اور کہاں سے وہ شروع ہوتا ہے۔  
 (۲)  $(1 + \lambda)^2$  کے پھیلاؤ میں سب سے پہلی منفی رقم کونسی ہے۔  
 (۳)  $(\lambda^2 + \lambda^3)$  کے پھیلاؤ میں ساتویں رقم کو اس کی ساوہ ترین شکل میں لکھو۔

(۴) بسط رفاص کے امتزاد کا وقت دمان و  $\pi^2 = \frac{\pi}{2}$  ہے جس میں فرض کرو و کی پیمائش ثانیوں میں ہوتی ہے، ل کی فٹوں میں اور ج  $= 32$  فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ۔ اگر اس رفاص کا طول لا فٹ بڑھ جائے (جہاں لا بمقابلہ ل ایک بہت ہی قلیل مقدار ہے) تو بتاؤ کہ وقت امتزاد بقدر

$\frac{\pi}{12}$  ل ج بڑھ جائیگا، اگر چھوٹی تقادیر کے پہلے رتبہ تک ہی جواب صحیح نکالا جائے۔  
 (۵) مسئلہ شنائی کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$.59191992 = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

۱۳ - اگر ہم (۱- لا) کو مسئلہ شنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو ہمیں چل ہوتا ہے  
 $(1 - \lambda)^2 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + \dots$

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ یہ نتیجہ صرف اس صورت میں صحیح ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمت اسے کم ہوتی ہے۔ پس ہمیں یہ دریافت کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے کہ کیا ہم ہمیشہ مندرجہ ذیل پھیلاؤ

$$(1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \lambda^2 + \dots$$

کو صادق مان سکتے ہیں، اور اگر نہیں تو کن شرائط کے تحت یہ پھیلاؤ صحیح تصور ہو سکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ  $n = 1$

$$\text{تب } (1 - \lambda)^{-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$$

اگر اس مساوات میں ہم  $\lambda = 2$  لکھیں تو

$$(1 - 2)^{-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots$$

لیکن یہ نتیجہ صریحاً غلط ہے۔ پس اس سے صاف ظاہر ہوتا ہے کہ ہم

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n = \frac{(1 - \lambda)^{-1} - (1 - \lambda)^{-(n+1)}}{1 - \lambda}$$

کو ہر صورت میں  $(1 + \lambda)^n$  کا صحیح حسابی معادل نہیں تصور کر سکتے ہیں۔

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^n = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

کی پہلی  $n$  رقموں کا چھل جمع =

$$\frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} - \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} = \frac{\lambda^{n+1} - \lambda}{1 - \lambda}$$

اور جب  $\lambda$  عدداً اسے چھوٹا ہوتا ہے تو  $n$  کو کافی بڑا لینے سے ہم  $\frac{\lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$  کو جس قدر چھوٹا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ یعنی اسی سلسلہ کی اگر کافی رقمیں لی جائیں تو ان کے حاصل جمع کو  $\frac{1}{1 - \lambda}$  سے جس قدر کم مختلف کہ ہم بنا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ لیکن جب  $\lambda$  عدداً اسے بڑا ہوتا ہے تو  $\frac{\lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$  کی قیمت  $n$  کے ساتھ بڑھتی جاتی ہے اور اس لئے سلسلہ مصرعہ بالا کی خواہ مخواہ کتنی بھی رقمیں لی جائیں اس کے حاصل جمع کی قیمت  $\frac{1}{1 - \lambda}$  کے تقریباً مساوی نہیں ہو سکتی ہے۔

بذریعہ مسئلہ ثنائی جب  $(1 + \lambda)^n$  کی صحودی قوتوں میں پھیلا یا جاتا ہے تو اس کا سلسلہ مستحق اور اس لئے حساباً قابل فہم ہوتا ہے صرف اس صورت میں جبکہ  $\lambda$  کی قیمت اسے کم ہوتی ہے اگر ہم ڈیالیمبر کے متواتر رقموں کی نسبت کے امتحان کا طریقہ استعمال کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ چونکہ  $(1 + \lambda)^n$  (جس کو ہم  $R_n$  لکھیں گے) اور  $(1 - \lambda)^n$  (جس کو ہم  $r_n$  لکھیں گے)

$$\text{میں نسبت } \frac{R_n}{r_n} = \frac{(1 + \lambda)^n}{(1 - \lambda)^n} = \frac{(1 + \lambda)^{n+1} - (1 - \lambda)^{n+1}}{(1 + \lambda)^n - (1 - \lambda)^n}$$

$$\frac{1}{n} \left\{ \frac{n - (1+n)}{n} \right\} = \frac{n - (1+n)}{n} =$$

$$\frac{n - (1+n)}{n} =$$

$$\text{اس لئے } \frac{n - (1+n)}{n} = \frac{n - (1+n)}{n} = 1 - \frac{1+n}{n} = 1 - \frac{1}{n} - 1 = -\frac{1}{n}$$

کیونکہ  $n$  ایک محدود عدد مانا گیا ہے اور  $n$  ناقتناہی بڑا ہو سکتا ہے۔ یہ نسبت عدد  $1$  سے چھوٹی ہوتی ہے جبکہ  $1/n$  سے کم ہوتا ہے۔ ہیں  $1/n$  کے پھیلاؤ کا سلسلہ مستحق ہوتا ہے جبکہ  $1/n$  عدد  $1$  سے چھوٹا ہوتا ہے۔

لیکن اگر  $1/n$  کی قیمت  $1$  سے بڑی ہو تو چونکہ اس سلسلہ کی عام رقم میں  $1/n$  شامل ہے اس لئے  $1/n$  کو کافی بڑا لینے سے  $1/n$  کو ہم کسی بھی معین محدود مقدار سے زیادہ بڑا بنا سکتے ہیں۔ پس سلسلہ مذکور کی قیمت غیر محدود ہوتی ہے۔ لہذا  $(1/n)$  کو  $1/n$  کی صعودی طاقتوں میں ایک ناقتناہی سلسلہ کی شکل میں پھیلانے کا حسابی مفہوم کچھ نہیں جبکہ  $1/n$  کی قیمت  $1$  سے بڑی ہوتی ہے۔

یہ بات یاد رکھنے کے قابل ہے کہ ہم  $(1/n)$  کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ہمیشہ پھیلا سکتے ہیں اس لئے کہ اگر  $1/n$  سے  $1/n$  بڑا ہو تو  $(1/n)$  کو  $1/n$   $(1/n)$  لکھ کر اور اگر  $1/n$  سے  $1/n$  بڑا ہو تو  $1/n$   $(1/n)$  لکھ کر پھیلا سکتے ہیں۔

۱۴۔ (۱۔  $1/n$ ) کے پھیلاؤ میں عام رقم کی سادہ ترین شکل -

$$\text{ واضح ہے کہ اس کی } (1+n) \text{ ویں رقم} = \frac{(1-n)(1-n) \dots (1-n)(1-n)}{n} = \frac{(1-n)^n}{n}$$

$$= \frac{(1-n)(1-n) \dots (1-n)(1-n)}{n} = \frac{(1-n)^n}{n}$$



$$= \frac{(1-n)(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)}{1}$$

$$= \frac{n(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)}{1}$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ  $(1-n)$  کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم مثبت ہوئی ہے۔

مندرجہ ذیل پھیلاؤ قابل یادداشت ہیں: —

$$(1-n)^1 = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

$$(1-n)^2 = 1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + \dots + (1+n) + n^4 + \dots$$

$$(1-n)^3 = 1 + 3n + 6n^2 + 10n^3 + \dots + \frac{(1+n)(2+n)}{2 \times 1} + n^4 + \dots$$

۱۵۔ تقریبی پھیلاؤ — علی حساب میں مندرجہ ذیل تقریبی ضابطے عموماً کافی ہوتے ہیں جبکہ لا اور ما بمقابلہ اکائی بہت ہی چھوٹے ہوتے ہیں: —

$$(1 \pm n)^n = 1 \pm n + \dots$$

مثال (۱) — اگر لا اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کا مکعب اور اس سے زیادہ قوتیں ناقابل لحاظ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$[1 \pm n]^n = 1 \pm n + \frac{n^2}{2} + \dots$$

مثال کے ہر شئی جملہ کو علاحدہ علاحدہ لا تک پھیلائے سے

$$(1-n)^n = 1 - n + \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{6} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{25}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 1 = \\ & (\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{1}{4}} - \sqrt[n]{\frac{1}{8}} + 1) \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2} \left( \sqrt[n]{\frac{1}{4}} + 1 \right) \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2} (1 + \sqrt[n]{2}) \\ & \dots\dots\dots \sqrt[n]{\frac{25}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} - 1 = \sqrt[n]{2} (1 + \sqrt[n]{2}) \\ & \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2} (1 + \sqrt[n]{2}) \end{aligned}$$

$$\frac{\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{1}{8}} - \sqrt[n]{\frac{1}{4}} + \sqrt[n]{2} + \dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{25}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 1}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2} + \dots\dots\dots - \sqrt[n]{\frac{25}{8}} + \sqrt[n]{\frac{1}{4}} - 1} = \text{پس دی ہوئی کسر}$$

$$\frac{\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{9}} + \sqrt[n]{\frac{4}{3}} + 5}{\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 5} =$$

$$\sqrt[n]{2} (\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 1) (\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{9}} + \sqrt[n]{\frac{4}{3}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$\left\{ \dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 1 \right\} (\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{9}} + \sqrt[n]{\frac{4}{3}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$\left\{ \dots\dots\dots + \left( \sqrt[n]{\frac{23}{8}} - \sqrt[n]{\frac{5}{4}} \right) - 1 \right\} (\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{9}} + \sqrt[n]{\frac{4}{3}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$(\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{23}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{9}} - \sqrt[n]{\frac{16}{9}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{23}{8}} + 1 = (\dots\dots\dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + 5) \frac{1}{5} =$$

مثال (۳) - ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\dots\dots\dots + \left( \sqrt[n]{\frac{29}{12}} \times \sqrt[n]{\frac{23}{12}} \times \sqrt[n]{\frac{24}{11}} \times \sqrt[n]{\frac{21}{8}} \right) + \sqrt[n]{\frac{23}{12}} \times \sqrt[n]{\frac{24}{11}} \times \sqrt[n]{\frac{21}{8}} + \left( \sqrt[n]{\frac{24}{11}} \times \sqrt[n]{\frac{21}{8}} \right) + \sqrt[n]{\frac{21}{8}} + 1$$

ایک دور قمری سلسلہ ہے اور اس کی قیمت دریافت کرو۔  
(جامعہ لندن)  
فرض کرو کہ پہلی تین رقمیں (۱+لا) کے پھیلاؤ کی رقمیں ہیں۔

$$\sqrt[n]{\frac{24}{11}} \times \sqrt[n]{\frac{21}{8}} = \sqrt[n]{2} \times \frac{(1-n) \sqrt[n]{2}}{(1-n)} \text{ اور } \sqrt[n]{2} = \text{تب } n = لا$$

$$\frac{24}{14} \times \frac{11}{8} = \frac{24}{14} - \frac{24}{14} \times \frac{11}{8} \text{ اور } \frac{24}{14} = 1 + \frac{10}{14}$$

$$\frac{24}{14} \times \frac{11}{8} = \frac{1}{14} + \frac{11}{8} - \frac{1}{14} \left( \frac{11}{8} \right) \text{ پس}$$

$$\frac{24}{14} = 1 + \frac{10}{14} \text{ یعنی}$$

$$\frac{24}{14} - 1 = \frac{24}{14} - \frac{14}{14} = \frac{10}{14}$$

اس قیمت کو پہلی مساوات میں داخل کرنے سے  $n = \frac{6}{7}$

$$1 - \left( \frac{6}{7} \right) = \frac{1}{7} \text{ اب } \left( \frac{6}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{5}{7} \text{ اور } \left( \frac{5}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \text{ اور } \left( \frac{4}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \text{ اور } \left( \frac{3}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{2}{7} \text{ اور } \left( \frac{2}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \text{ اور } \left( \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{7} = 0$$

$$\left( \frac{6}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{5}{7} \text{ اور } \left( \frac{5}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \text{ اور } \left( \frac{4}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \text{ اور } \left( \frac{3}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{2}{7} \text{ اور } \left( \frac{2}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \text{ اور } \left( \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{7} = 0$$

$$\dots + \left( \frac{6}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{5}{7} \text{ اور } \left( \frac{5}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \text{ اور } \left( \frac{4}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \text{ اور } \left( \frac{3}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{2}{7} \text{ اور } \left( \frac{2}{7} \right) - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \text{ اور } \left( \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{7} = 0$$

$$\dots + \left( \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} \right) + \left( \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \right) + \left( \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \right) + \left( \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \right) + \left( \frac{6}{7} \right) + 1 =$$

اس کے ظاہر ہے کہ سلسلہ زیر بحث  $\left( 1 - \frac{1}{7} \right)^6$  اور اس لئے اس کی قیمت

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128 = \left( \frac{1}{7} \right)^6$$

$$= 128 - 1$$

مسائل نمائ (ج)

عشاریہ کے پانچویں مقام تک مندرجہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو:

$$\frac{1}{100000} (1) \quad \frac{1}{100000} (2)$$

اگر لا اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بلند تر قوتیں ناقابلِ لحاظ سمجھی جاسکتی ہیں تو ذیل کے جلوں کی قیمت دریافت کرو:-

$$\frac{\frac{1}{2}(11^2 + 3) \times \left(11^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{\frac{1}{2}(11 + 3)} \quad (۳)$$

$$\frac{11^2 \left(11^{\frac{1}{2}} + 1\right) + 11^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{2} - 11^{\frac{1}{2}} + 11^2 + 11^3} \quad (۴)$$

(۵) ثابت کرو کہ

$$1 + 1 + \dots + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{(1+n)}{2} + \left(\frac{1}{n} - 1\right) = \dots$$

(۶)  $\left(\frac{1}{n} - 1\right)$  کے پھیلاؤ میں لا کا سر معلوم کرو۔  
(۷) ثابت کرو کہ  $\sqrt{1+n}$  کو اگر  $1 + \frac{1}{n}$  کے مساوی سمجھیں تو جو خطا واقع ہوگی  $\frac{1}{n}$  سے کم ہوگی۔

(۸) اگر لا چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ  $\frac{\frac{1}{2}(11+1) - \frac{1}{2}(11-1)}{11^2 + 1}$  کے لئے  $\frac{1}{n} + \frac{11}{11^2}$  لا ایک تقریبی جملہ ہے۔

۱۶ (۱+ لا) کے پھیلاؤ میں عدد سب سے بڑی رقم دریافت کرو جبکہ ن کوئی سی منطق قیمت رکھتا ہو۔  
چونکہ یہاں سب سے بڑی رقم کی حدودی قیمت سے بحث ہے ہم لا کو سارے پھیلاؤ میں مثبت تصور کریں گے۔

صورت (۱)۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔  
پھیلاؤ کی (ر+۱) ویں رقم ر۔ دیں رقم کو  $\frac{(1+n)}{r}$  لا یعنی  $\left(\frac{1+n}{r}\right)$  (ر) لا کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔  
اور اس لئے رقمیں بڑی ہوتی جاتی ہیں تا وقتیکہ

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) > 1 > 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ یعنی } \frac{n}{n+1} < 1 < 1 + \frac{n}{n+1} \text{ یا } \frac{n}{n+1} < 1 < \frac{n+1}{n}$$

اگر  $\frac{n+1}{n}$  ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تقسیم کرو۔ تب اگر  $r = p$  تو ضرب دینے والا جزو ضربی اہوتا ہے اور اس لئے  $(p+1)$  ویں رقم پ۔ ویں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور یہ رقمیں کوئی ہی اور رقم سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر  $\frac{n+1}{n}$  ایک صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تقسیم کرو تب  $r$  کی سب سے بڑی قیمت ق ہوگی اور  $(q+1)$  ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۲)۔ فرض کرو کہ  $n$  ایک مثبت کسر ہے۔

مثل سابق  $r$ ۔ ویں رقم کو  $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$  کے ساتھ ضرب دیئے سے  $(r+1)$  ویں رقم حاصل ہوتی ہے۔

(۱) اگر لا اِکائی سے بڑا ہو تو  $r$  کو بڑھانے سے متذکرہ بالا ضرب دینے والے جزو ضربی کو ہم۔ لا کے جس قدر قریب بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ پس ایک معین رقم کے بعد ہر ایک رقم اس سے ٹھیک پیشتر کی رقم کا عدداً لا اِکٹنا ہوتی ہے۔ لہذا پھیلاؤ کی رقمیں مسلسل بڑی ہوتی جائیں گی اور سب سے بڑی کوئی رقم نہ ہو سکیگی۔

(ب) اگر لا اِکائی سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ضرب دینے والا جزو ضربی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ  $r < 1 + \frac{1}{n}$  اس کے بعد سے وہ منفی ہو جاتا ہے لیکن ہمیشہ عدداً  $1$  سے کم رہتا ہے۔ اس لئے پھیلاؤ میں ایک سب سے بڑی رقم ہوگی۔

ضرب دینے والا جزو ضربی  $1$  سے بڑا ہوگا تا وقتیکہ  $\frac{n}{n+1} < 1 < \frac{n+1}{n}$ ۔

اگر  $\frac{n+1}{n}$  ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تقسیم کرو۔ تب صورت (۱) کی طرح  $(p+1)$ ۔ ویں رقم پ۔ ویں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ

دونوں رقیس دوسری سب رقیوں سے بڑی ہوں گی۔

اگر  $\frac{(1+n)}{1+1}$  صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ اس کا صحیح حصہ ق ہے۔

تب (ق + ۱) دیں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۳)۔ فرض کرو ن منفی ہے اور =۔ م اس لئے م مثبت

ہے۔ تب ضرب دینے والے جزو ضربی کی عددی قیمت  $\frac{1}{1+1}$  ہے یعنی  $(\frac{1}{1+1})$  ہے۔

(۱) اگر لا اکائی سے بڑا ہو تو صورت (۲) کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ پھیناؤ کے سلسلہ میں سب سے بڑی رقم کوئی موجود نہیں ہے۔  
(ب) اگر لا اکائی سے چھوٹا ہو تو ضرب دینے والا جزو ضربی ۱ سے بڑا ہوگا۔ تا وقتیکہ

$$(\frac{1}{1+1}) < 1 \text{ یعنی } \frac{1}{1+1} < 1$$

$$یا \frac{1}{1+1} < 1$$

اگر  $\frac{(1-m)}{1-1}$  ایک مثبت صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب

(پ + ۱)۔ دیں رقم پ۔ دیں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ سلسلہ کی کسی دوسری رقم سے زیادہ بڑی ہوگی۔

اگر  $\frac{(1-m)}{1-1}$  مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے

تعبیر کرو۔ تب (ق + ۱)۔ دیں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

اگر  $\frac{(1-m)}{1-1}$  منفی ہو تو م اکائی سے کم ہوگی۔ اور ضرب دینے والے

جزو ضربی کو (۱ -  $\frac{1}{1-1}$ ) لا کی شکل میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ









کسی متین رقم کا سر معلوم کرنے کا طریقہ بیان کریں گے۔

(۱ + ب + ج + د + ..... ) کے پھیلاؤ میں کسی متین رقم  
اُب ب ج د کا سر معلوم کرنا جبکہ پ ایک ثابت صحیح عدد ہے۔

یہ پھیلاؤ پ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے ہر جز ضربی  
(۱ + ب + ج + د + ..... ) ہے اور اس پھیلاؤ کی ہر ایک رقم ان پ

اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف لے کر ضرب دینے سے بنتی ہے۔  
پس کوئی رقم اُب ب ج د ..... جتنے طریقوں سے آخری حاصل ضرب

میں صورت پذیر ہوگی ان کی تعداد پ حروف کو ترتیب دینے کے  
طریقوں کی تعداد کے مساوی ہے جبکہ ان میں سے وہ حروف لے ہونے  
چاہئیں، یہ حروف ب، ج، حروف ج اور اس طرح بقیہ دیگر حروف یعنی

اُب ب ج د ..... کا سر

جس میں  $پ = ..... + د + ج + ب + ا$

نتیجہ صریح۔۔ (۱ + ب + ج + د + ..... ) کے پ

کے پھیلاؤ میں اُب ب ج د ..... کو اپنے میں شامل رکھنے والی رقم

اُب ب ج د ..... کا سر

ہے، جس میں  $پ = ..... + د + ج + ب + ا$

اس رقم کو ہم پھیلاؤ کی عام رقم کہہ سکتے ہیں۔

مثال — (۱ + ب + ج + د + ..... ) کے پھیلاؤ میں اُب کا سر دریافت کریں

اس پھیلاؤ کی عام رقم

جس میں  $ع + ب + ج = ۱۱$   
 اب ہمیں چاہئے کہ آزمائش سے ب اور ج کی وہ تمام مثبت صحیح  
 قیمتیں معلوم کریں جو مساوات  $ب + ۲ج = ۷$  کے لئے صادق آتی ہیں۔  
 اس کے بعد  $ع$  کی قیمتیں ذیل کی مساوات سے معلوم کر لی جاسکتی ہیں:-

$$\begin{array}{ccccccc} ع + ب + ج = ۱۱ & & & & & & \\ ج = ۳ & \text{لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے} & ب = ۵ & \text{اور اس لئے} & ع = ۳ & & \\ ج = ۲ & & ب = ۳ & & ع = ۶ & & \\ ج = ۱ & & ب = ۵ & & ع = ۵ & & \\ ج = ۰ & & ب = ۷ & & ع = ۴ & & \end{array}$$

مطلوبہ سر، پھیلاؤ کی عام رقم کے لئے اوپر جو جملہ لکھا گیا ہے اس  
 کی نظیری قیمتوں کا حاصل جمع ہوگا۔  
 پس مطلوبہ سر =

$$\frac{۱۱}{۱۲۳۴۵} \text{ رُب ج} + \frac{۱۱}{۲۳۴۵۶} \text{ رُب ج} + \frac{۱۱}{۳۴۵۶۷} \text{ رُب ج} + \frac{۱۱}{۴۵۶۷۸} \text{ رُب ج}$$

$$= ۱۳۲۰ \text{ رُب ج} + ۴۶۲۰ \text{ رُب ج} + ۲۶۶۲ \text{ رُب ج} + ۲۳۰ \text{ رُب ج}$$

۲۰۔ پھیلاؤ (۱ + ب + ج + لا + دلا + ..... ) کے پھیلاؤ میں

عام رقم کی تعیین جبکہ  $n$  کوئی ایک منطوق مقدار ہو۔

مسئلہ ثانی سے عام رقم

$$\frac{n(n-1)(n-2).....(n-p+1)}{p} (ب + لا + ج + لا + دلا + .....)$$

ہے، جس میں  $p$  ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

فصل (۱۶) سے (ب + لا + ج + لا + دلا + ..... ) کے پھیلاؤ کی

عام رستم

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right] \text{ بے ج ج ذہ } \dots \text{ لا } ۲ + ۲ + ۲ + \dots + ۲ \text{ ہے۔}$$

جس میں ہر اجہ ۲ ہے۔ مثبت صحیح اعداد ہیں جن کا حاصل جمع پ ہے۔

پس دئے ہوئے جملہ کے پھیلاؤ کی عام رقم

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p} \text{ بے ج ج ذہ } \dots \text{ لا } ۲ + ۲ + ۲ + \dots + ۲ \text{ ہے۔}$$

جس میں ہر + جہ + ۲ + ۲ + ۲ = پ

۳۔ چونکہ (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰) کو ہم ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

اس لئے کافی ہوگا اگر ہم صرف ایسی صورت پر غور کریں جس میں کثیر رقی جملہ کی پہلی رقم ۱ کافی ہے۔

چنانچہ (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰) کے پھیلاؤ کی عام رقم

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p} \text{ بے ج ج ذہ } \dots \text{ لا } ۲ + ۲ + ۲ + \dots + ۲ \text{ ہے۔}$$

جس میں ہر + جہ + ۲ + ۲ + ۲ = پ

مثال — (۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰) کے پھیلاؤ میں لا کا سرور یافتہ اس کی عام رقم

$$\frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{2} \right) (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p} \text{ جہ } (۲ - ۱) (۳ - ۲) (۴ - ۳) \dots (۱۰ - ۹) \text{ ہے۔}$$

ہمیں چاہیے کہ آزمائش کے ذریعہ 'ب'، 'ج'، 'ض' کی وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کریں جو مساوات 'ب' + 'ج' + 'ض' = ۳ کے لئے صادق آتی ہیں۔ تب مساوات 'پ' = 'ب' + 'ج' + 'ض' سے 'پ' کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔ مطلوبہ سر مندرجہ بالا جملہ کی نظیری قیمتوں کا حامل جمع ہوگا۔

'ب'، 'ج'، 'ض' کی تعیین میں انب ہوگا کہ 'ض' کو یکے بعد دیگرے جو مثبت صحیح قیمتیں دی جائیں گی ان میں سب سے پہلی قیمت اعظم ممکن ہو۔ موجودہ مثال میں یہ قیمتیں اس طرح محبت ہونگی:-

$$\text{ض} = ۱, \text{ج} = ۰, \text{ب} = ۰, \text{پ} = ۱$$

$$\text{ض} = ۰, \text{ج} = ۱, \text{ب} = ۱, \text{پ} = ۲$$

$$\text{ض} = ۰, \text{ج} = ۰, \text{ب} = ۲, \text{پ} = ۲$$

ان قیمتوں کو عام رقم کے جملہ میں تعویض کرنے سے مطلوبہ سر

$$= \left(\frac{۲}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۰}{۳}\right) + \left(\frac{۰}{۳}\right) = \frac{۲}{۳}$$

$$= \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} = ۰$$

نوٹ:- طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ بعض اوقات مسئلہ ثنائی کا راست استعمال زیادہ آسان اور زور اثر ثابت ہوتا ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

مثال:- (۱-۱۱ + ۱۱۳) کے پھیلاؤ میں 'لا' کا سر دریافت کرو۔

$$(۱-۱۱ + ۱۱۳) = \{ (۱۱۳ - ۱۱) - ۱ \}$$

مسئلہ ثنائی کے ذریعہ اس کو پھیلائیں تو اس کی پہلی چند رقمیں ص ۱۱ ہونگی:-

$$۱ + (۱۱۳ - ۱۱) + (۱۱۳ - ۱۱) + (۱۱۳ - ۱۱) + (۱۱۳ - ۱۱) + (۱۱۳ - ۱۱) + \dots$$

اس سے آگے بڑھنے کی ہمیں اس لئے ضرورت نہیں کہ بعد کو آنے والی تمام رقموں میں لاکھ کی قوت لائے سے زائد ہوگی۔

$$\text{پس مطلوبہ سر} = 9 \times 6 + 10 \times 3 \times (2)^2 + (3 -) + 5 \times (2)^2 = 74 -$$

### سوالات (۵)

(۱) (ا + ب - ج - د) کے پھیلاؤ میں لاپ کا سر معلوم کرو۔

(۲) (۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ + ۱۱ - ۱۲) کے پھیلاؤ میں لاپ کا سر معلوم کرو۔

(۳) (۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ + ۱۱ - ۱۲) کے پھیلاؤ میں لاپ کا سر دریافت کرو۔

(۴) (۱ + ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰ - ۱۱ + ۱۲) کے پھیلاؤ۔

(۵) اگر (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲) کا پھیلاؤ۔

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \dots + 100 = \dots$$

توثابت کرو کہ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \dots + 100 = \dots$$

$$1 - 5 =$$

## دوسرا باب

جزوی کسور

۲۲۔ متعدد کسور کا حاصل جمع آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔ اس کا معکوس عمل یعنی ایسی کسروں کا دریافت کرنا جن کے نسب نامہ کسی دی ہوئی کسر کے نسب نامہ سے چھوٹے ابعاد کے ہوں اور جن کا جبری مجموعہ اس دی ہوئی کسر کے مساوی ہو، اعلیٰ ریاضی میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ ان کسروں کو دی ہوئی کسر کی جزوی کسریں کہتے ہیں۔

جس کسر کی جزوی کسریں مطلوب ہیں اس کے شمار کنندہ کو کسی معین حرف کے لحاظ سے نسب نامہ سے چھوٹے ابعاد کا تصور کر سکتے ہیں۔ اگر اہتداد فی الواقع ایسا نہ بھی ہو تو شمار کنندہ کو نسب نامہ پر تقسیم کر کے اس کو بالآخر اس حالت میں لا سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں دی ہوئی کسر ایک صحیح جملہ اور ایسی کسر کے مجموعہ کے مساوی لکھی جائیگی جس میں شمار کنندہ کے ابعاد نسب نامہ کے ابعاد سے کمتر ہوں گے۔

۲۳۔ کوئی کسر جس کا نسب نامہ درجہ اول کے متعدد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ڈھالا جاسکتا ہے، جزوی کسور کے ایک سلسلہ میں تحلیل ہو سکتی ہے جس کے نسب نامہ درجہ اول کے متذکرہ صدر اجزائے ضربی ہوں گے۔

فرض کرو کہ دی ہوئی کسر کا نسب نامہ ان اجزائے ضربی (لا - ج) (لا - ب) (لا - ج) (لا - ب) کا حاصل ضرب ہے۔ اور فرض کرو کہ شمار کنندہ (لا) سے تعبیر کیا جاتا ہے جس میں ن (لا) ایسا کوئی ایک جملہ ہے جس کے ابعاد بلحاظ (ن - ا) سے بالاتر نہیں ہیں۔

$$\text{پس } \frac{\text{ن (لا)}}{\text{(لا-ا) (لا-ب) (لا-ج) ...}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا-ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا-ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{لا-ج}} + \dots$$

اور میں 'ا' ب 'ج' وغیرہ (جو لا کے غیر تابع ہیں) کی قیمتیں دریافت کرنا ہے۔

(لا-ا) (لا-ب) (لا-ج) .... سے ضرب دینے سے  
 ف (لا) = ا (لا-ب) (لا-ج) .... + ب (لا-ا) (لا-ج) ....  
 + ج (لا-ا) (لا-ب) ..... (۱)  
 رابطہ (۱) ایک مثال ہونے کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ مساوات  
 کے دونوں جانب لاکھ مشابہ قوتوں کی قوتوں کے مساوی ہوں - ہمیں  
 معلوم ہے کہ ف (لا) زیادہ سے زیادہ (ن-۱) درجہ کا ہوگا۔ اور (۱) کے  
 سیدھے جانب کی تمام قوتیں (ن-۱) درجہ کی ہیں۔ پس (۱) کے دونوں  
 جانب کے لاکھ لاکھ لاکھ کے سروں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے  
 سے ہمیں ن مساواتیں مل جاتی ہیں جو ن مقداروں 'ا' 'ب' 'ج' ....  
 کی قیمتیں کے لئے کافی ہیں۔

ہم 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ کی قیمتیں علیحدہ علیحدہ بھی مندرجہ ذیل  
 طریقہ سے دریافت کر سکتے ہیں۔ چونکہ رابطہ (۱) لاکھ تمام قیمتوں کے لئے  
 صحیح ہونا چاہیے اس لئے وہ لا = ا کے لئے بھی صحیح ہوگا۔ پس لاکھ کے  
 مساوی لکھنے سے ف (لا) = ا (لا-ب) (لا-ج) .... اور اس لئے

ا =  $\frac{ف (لا)}{(لا-ب) (لا-ج)}$  اسی طرح ب =  $\frac{ف (لا)}{(لا-ا) (لا-ج)}$  اور ایسا ہی  
 ج =  $\frac{ف (لا)}{(لا-ا) (لا-ب)}$  کی قیمتیں تین ہو سکتی ہیں۔

ہم نے پول 'ا' 'ب' 'ج' .... کی قیمتیں دریافت کر لیں جو رابطہ (۱)  
 کو لاکھ ن قیمتوں 'ا' 'ب' 'ج' .... کے لئے صحیح بناتی ہیں۔ اور چونکہ رابطہ (۱)  
 کے دونوں جانب کے پچھلے (ن-۱) سے بڑے درجہ کے نہیں ہیں اس لئے  
 یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ رابطہ (۱) لاکھ تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

پس  $\frac{ف (لا)}{(لا-ا) (لا-ب) (لا-ج) \dots} = \frac{ف (لا)}{(لا-ا) (لا-ب) (لا-ج) \dots} \cdot \frac{ا}{ا} \cdot \frac{ب}{ب} \cdot \frac{ج}{ج} \dots$   
 مندرجہ بالا بیان میں یہ فرض کیا گیا تھا کہ نسب نامہ کے تمام اجزائے ضربی معلوم  
 اور ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عام مسئلہ حسب ذیل ہے :-





نسب ناما کے اجزائے ترکیبی (۱ + ۲ + ۳) اور (۱ + ۲ + ۳ + ۴) لکھے جاسکتے ہیں۔

$$\frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴}{۱ + ۲ + ۳}$$

$$\frac{(۱-۲)(۱+۲+۳+۴)}{۳-۲+۳}$$

$$(۱+۲+۳+۴) - ۲ + ۳ + ۴ = ۳ + ۴$$

$$(۱-۲)(۳+۴) - ۱ + ۲ + ۳ = ۴$$

$$(۱-۲)\{(۱+۲+۳+۴) - ۲ + ۳ + ۴\} - ۱ + ۲ + ۳ =$$

$$(۱-۲)(۳+۴+۵) - ۱(۱+۲+۳) =$$

$$(۳+۴)(۱-۲)(۳+۴+۵) - (۲+۳)۱(۱+۲+۳) = (۲+۳)۴$$

$$\frac{(۲+۳)(۱-۲)}{(۱+۲+۳+۴)۴} - \frac{(۲+۳)۱}{(۳+۴+۵)۴} = \frac{۲+۳}{(۳+۴+۵)۴(۱+۲)}$$

$$\left\{ \frac{۳+۴}{۱+۲+۳+۴} - ۱ \right\} \frac{۱}{۴} - \left\{ \frac{۴+۵}{۳+۴+۵} - ۱ \right\} \frac{۱}{۴} =$$

$$\frac{۳+۴}{(۳+۴+۵)۴} - \frac{۳+۴}{(۱+۲+۳+۴)۴} =$$

$$\frac{۱}{۲(۳+۴)} - \frac{۱}{۳(۲+۳)} \text{ — مثال (۲)}$$

یہاں نسب ناما کے اجزائے ترکیبی (۱ + ۲ + ۳ + ۴) اور (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵) پر غور کرو۔

$$\frac{۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵}{۱ + ۲ + ۳ + ۴}$$

$$\frac{(۱+۲)۱ + ۳ + ۴ + ۵}{۱ + ۲ + ۳ + ۴}$$

$$پس \quad {}^2(3+u)u - {}^3(2+u) = 8 + 11u$$

$$اور \quad (10+11u)(8+11u) - {}^2(2+u)9 = 1$$

$$(10+11u) \{ {}^2(3+u)u - {}^3(2+u) \} - {}^2(2+u)9 =$$

$${}^3(2+u)(10+11u) - {}^2(2+u)(9+11u+{}^2u^3) =$$

$$\frac{(10+11u){}^2u}{{}^2(3+u)} - \frac{(9+11u+{}^2u^3){}^2u}{{}^3(2+u)} = \frac{{}^2u}{{}^2(3+u){}^3(2+u)} \quad لہذا$$

$$\frac{42+11u}{{}^2(3+u)} - 8+11u - \frac{64+11u(42+{}^2u^3)}{{}^3(2+u)} + 8-11u =$$

$$\frac{42+11u}{{}^2(3+u)} - \frac{64+11u(42+{}^2u^3)}{{}^3(2+u)} =$$

مصرعہ بالا مثالوں سے معلوم ہو گیا کہ بالعموم  $\frac{ن}{ج} = \frac{ب}{ب} + \frac{ا}{ب} = \frac{ن}{ب}$  اس طریقہ عمل سے ہم چند مثالوں کو حل کر کے بتائیں گے:-

$$(۱) \text{ کسر } \frac{12+11u+{}^2u^3}{(3+u)(2-u)} \text{ کو جزوی کسروں میں علیحدہ کرو۔}$$

چونکہ شمار کنندہ کا درجہ شب نما کے درجہ سے کمتر ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{ج}{3+u} + \frac{ب}{2+u} + \frac{ا}{2-u} = \frac{12+11u+{}^2u^3}{(3+u)(2-u)}$$

جس میں 'ا'، 'ب' اور 'ج' مستقل ہیں۔

مسوات کے دونوں جانب  $(3+u)(2-u)$  سے ضرب دینے سے

$${}^2u^3 + 11u + 12 = 1 + (3+u)(2-u) + ا(2-u)(2+u) + ب(2-u)(3+u) + ج(2-u)(3+u)$$

یعنی  ${}^2u^3 + 11u + 12 = 1 + (3+u)(2-u) + ا(2-u)(2+u) + ب(2-u)(3+u) + ج(2-u)(3+u)$  چونکہ آخری مساوات لاگت تمام قیمتوں کے لیے صادق آتی چاہیے۔

$$12 = 1 + 3 + 2 - ا - 2ب - 3ج$$

$$جس سے 1 = ا، 2 = ب، 1 = ج اور 2 =$$

$$\text{پس } \frac{2}{3+ل} - \frac{1}{2+ل} + \frac{2}{2-ل} = \frac{۱۴+۱۱+ل}{(۳-ل)(۲+ل)}$$

اگر نسب نامہ کے اجزائے ضربی سب کے سب خطی اور ایک دوسرے سے مختلف ہوں جیسا کہ مثال بالا میں ہم دیکھتے ہیں تو ذیل کا خاص طریقہ زیادہ سہل ہوگا۔

مساوات  $ل + ۱۱ + ۱۴ = (۲+ل)(۲-ل) + (۳+ل)(۲-ل) + ج(۲-ل)(۲+ل)$  میں  $ل$  کو باری باری سے ایسی قیمت دی جائے کہ اصل کسر کے نسب نامہ کے اجزائے ضربی میں سے ایک ایک جُزء صفر ہو جائے یعنی  $ل = ۲$  اور  $ل = ۳$

جب  $ل = ۲$  تو مساوات ہو جاتی ہے  $۲۰ = ۲۰$  جس سے  $ل = ۲$  جب  $ل = ۳$  تو مساوات ہو جاتی ہے  $۴ = ۴$  جس سے  $ل = ۳$  اور جب  $ل = ۵$  تو مساوات ہوتی ہے  $۱۰ = ۱۰$  جس سے  $ل = ۵$

مثال —  $\frac{ل + ۱۵}{(۵+ل)(۲+ل)(۱-ل)}$  کو جزئی کسروں میں تحلیل کرو۔

$$\text{فرض کرو } \frac{ل + ۱۵}{(۵+ل)(۲+ل)(۱-ل)} = \frac{ب}{۵+ل} + \frac{۲}{۱-ل} + \frac{ج}{۲+ل}$$

[یہاں یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ بائیں جانب کے جملہ کی دوسری رقم کا نسب نامہ بلحاظ لا دوم درجہ کا ہے اور شمار کنندہ پہلے درجہ کا۔]

$$\text{پس } ل + ۱۵ = (۲+ل)(۲-ل) + (۵+ل)(۲-ل) + ج(۲-ل)(۱-ل)$$

$$ل = ۱ \text{ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے } ۱۶ = ۲۸ \text{ پس } ل = ۲$$

مساوات بالا میں  $ل = ۲$  لکھ کر جملوں کو ترتیب دینے سے

$$-ل + ۱۴ + ۵ = (ب + ل + ج)(۱-ل)$$

یا  $(۱-ل)$  پر تقسیم کرنے سے  $ب + ل + ج = ۵ - ل$

$$\text{لہذا } \frac{۵+ل}{۵+ل+ل} - \frac{۲}{۱-ل} = \frac{ل+۱۵}{(۵+ل)(۲+ل)(۱-ل)}$$



معمولی قواعد سے ان کا جبری حاصل جمع نکالے تو معلوم ہوگا کہ اس کی شکل ہو بہو  $\frac{ف (لا)}{ف (لا)}$  کی سی ہوگی۔

اگر ہم مساوات (۱) کو  $ف (لا)$  سے ضرب دیں تو ہمیں بجاۓ  $لا$  چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملیگی، چونکہ ہمارا مفروضہ ہے کہ  $ف (لا)$  کا درجہ  $ف (لا)$  کے درجہ سے چھوٹا ہے۔ پس مساوات کے دونوں جانب  $لا^۱$ ،  $لا^۲$ ،  $لا^۳$  اور  $لا$  کے سروں اور مستقل رتوں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے سے ہمارے لیے سات غیر معلوم مستقلوں  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$ ،  $د$ ،  $ه$ ،  $و$ ،  $ز$  کی تیسریں کے لئے سات مساواتیں بہتا ہو جاتی ہیں۔ پس واضح ہے کہ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ایسے مستقل موجود ہیں تو ان کی تعیین کا مصرعہ بالا طریقہ بالکل عام ہے۔ بطور مثال چند سوال حل کیے جاتے ہیں۔

$$(۱) \quad \frac{۳لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱۱}{۲(۱ - لا)} \text{ کو جتنی کسروں میں تحلیل کرو۔}$$

معمولی تقسیم کے عمل سے دی ہوئی کسر =  $\frac{۳}{۲} + لا + \frac{۱}{۲} + \frac{لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱۱}{۲(۱ - لا)}$

$$\text{اب فرض کرو کہ } \frac{لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱۱}{۲(۱ - لا)} = \frac{ب}{۱ - لا} + \frac{د}{۲(۱ - لا)}$$

$$+ \frac{ع + لا}{۱ + لا + لا^۲} + \frac{ج + لا}{۲(۱ + لا + لا^۲)}$$

اور کسور سے صاف کرو۔ نتیجہ ہے

$$لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱۱ = (ب + ع) لا + (ا + ب - ع + ف) لا^۲$$

$$+ (۲۲ + ب + ج - ف) لا^۳ + (۲۲ - ب - ج + د - ع - ف) لا^۴$$

$$+ (۲۲ - ب - ج + د - ع - ف) لا^۵ + (۱ - ب + د + د + ف)$$

لا کی مساوی قوتوں کے سروں کو باہمیہ کے مساوی لکھنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$\cdot = \text{ف} + \text{ع}$$

۱ + ب - ع + ف = .

$$12 + 1 + 2 + 3 = 18$$

$$r = \epsilon - \delta + \frac{1}{2} \frac{r}{\epsilon} - \frac{1}{2} \frac{r}{\delta}$$

$$L = 6 - 2 + 22 - 2 + 6 - 12$$

$$r = f + d + b - 1$$

ہمسے ۲ =  $\frac{1}{4}$  پ = ج =  $\frac{1}{3}$  د =  $\frac{1}{2}$  ع = ف =  $\frac{1}{4}$

$$\frac{r+1}{r(1+1/r)} + \frac{r}{r(1-1/r)} = \frac{r+1-r}{r(1-1/r)} \quad \text{پس}$$

$$\frac{P}{(1+U+U^2)^3} +$$

پس دی ہونی کسر =  $\frac{r}{(1+l+r)r} + \frac{r+lr}{r(1+l+r)} + \frac{r}{r(1-l)r} - \frac{1}{r} + l\frac{r}{r}$

مثال (۲)  $\frac{5 + 12}{(3-1)^2(1-1)}$  کو جُزئی کسروں میں ظاہر کرو۔

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ  $\frac{a}{(x^2-1)} + \frac{b}{(1-x)} + \frac{c}{(1-x)} + \frac{d}{x(1-x)} = \frac{a+bx}{(x^2-1)^2(1-x)}$

$$r(1-u)a + (r-u)^2(1-u)c + (r-u)(1-u)b + (r-u)^2 = a + ur$$

اس آئینہ ساری مساوات کے دونوں جانب 'لا'، 'لا'، 'لا' کے سرور  
کو ایک دوسرے کے سادی لکھنے سے ہم کو ۴ مقادیر 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'  
معلوم کرنے کے لیے چار مساواتیں ملتی ہیں جس سے واضح ہے کہ چار افروضہ  
صحیح اور جائز ہے۔ لیکن 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کی اصلی قیمتیں دریافت کرنے کے  
لیے مصرعہ بالا طریقہ بہترین طریقہ نہیں ہے۔ اس خاص مثال میں مندرجہ  
ذیل طریقے سے یہ قیمتیں زیادہ سرعت کے ساتھ دریافت ہو سکتی ہیں:-





+ م کی بلند تر قوتوں والی رقمیں  
 مساوات کے بائیں جانب = ۱ + ب + ج + د + ا × صحیح جملہ م کی رقموں میں  
 پس 'ا'، 'ب'، 'ج' کے سروں کو باہر دیگر مساوی لکھنے سے

$$۱ = \frac{۱۰^۳}{۱۰^۳} \text{ 'ب' } = \frac{۱۰^۳}{۱۰^۳} \text{ 'ج' } = \frac{۱۰^۳ (۱-۱۰)}{۱+۱۰}$$

$$\text{اس لیے } \frac{۱}{۱۰^۳} (۱+۱۰) + \frac{۱}{۱۰^۳} (۱-۱۰) + \frac{۱}{۱۰^۳} (۱-۱۰) + \frac{۱}{۱۰^۳} (۱-۱۰) = \frac{۱}{۱۰^۳} (۱+۱۰)$$

+ ایک صحیح جملہ (۱۰-۱) میں درجہ کا۔

پہلی تین رقموں کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلانے سے (پہلی مثال کی طرح)،  
 ہمیں ۱۰<sup>۳</sup> کا سر معلوم ہو جاتا ہے۔  
 ۲۶- کسی کسر کے جزئی کسور میں تحلیل ہونے کے امکان کا ثبوت۔

فرض کر دو کہ وہی ہوئی کسر  $\frac{ف (۱۰)}{ف (۱۰)}$  ہے جس میں ف (۱۰) اور ف (۱۰)

ایسے کثیر رقمی جملے ہیں جن کے درمیان کوئی مشترک جزو ضروری نہیں ہے۔  
 فرض کرو کہ لا۔ ر نسبت نما ف (۱۰) کا ایک ایسا خطی یا ایک درجی  
 جزو ضروری ہے جو م مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔ اور ف (۱۰) بقیہ  
 اجزائے ضروری کا قائل مضرب ہے۔ تب ف (۱۰) = (لا۔ ر) ف (۱۰) اور

$$(۱) \quad \frac{ف (۱۰)}{ف (۱۰)} = \frac{ف (۱۰)}{(لا۔ ر) ف (۱۰)}$$

$$(۲) \quad \frac{ف (۱۰)}{ف (۱۰)} = \frac{ف (۱۰)}{(لا۔ ر) ف (۱۰)} + \frac{۱}{(لا۔ ر)}$$

مثلاً صحیح ہے: ۱/۱۰ خواہ کتنی بے عقل ہو۔  
 (۱۰) ۱/۱۰ خواہ کتنی بے عقل ہو۔

$$(۳) \quad \frac{ف (۱۰)}{ف (۱۰)} = \frac{ف (۱۰)}{(لا۔ ر) ف (۱۰)} + \frac{۱}{(لا۔ ر)}$$



جزو ضربی کے لحاظ سے جو م مرتبہ واقع ہوتا ہے، ہم م کسریں فرض کر سکتے ہیں جن کے شمار کنندے مستقل ہیں اور جن کے نسب انہی اس جزو ضربی کی علی الترتیب م - وین (م - ۱) وین ..... پہلی قوتیں ہیں۔  
ان کسروں کو دُور کرنے کے بعد بقیہ کسری یعنی  $\frac{\text{ف م (لا)}}{\text{ف (لا)}}$  کے ساتھ ہم اسی طرح عمل کر سکتے ہیں۔

مندرجہ بالا بحث میں ر اور ف (لا) اور ف (لا) کے حقیقی ہوتے ہیں یا ملحقہ۔ بدین وجہ یہ طریقہ علی التواتر 'ف (لا) کے ہر ایک جزو ضربی کے ساتھ استعمال کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح تجزی کسور میں مکمل تحلیل ہو گئی ہے۔ اگر ف (لا) اور ف (لا) کے حقیقی سر ہوں اور ہم چاہتے ہیں کہ صرف حقیقی کنیر رقمی جلوں کی حد تک اپنے آپ کو محدود رکھیں تو ہم یہ طریقہ صرف حقیقی خطی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کریں گے اور آئندہ فصل میں دو درجی اجزائے ضربی سے بحث کریں گے۔

۲۷۔ ایسی صورت میں جبکہ نسب ف (لا) کا جزو ضربی دو درجی اور شکل (لا - ۱) + ب ہو تا ہے جو حقیقی خطی اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں ہو سکتا فرض کرو

$$\text{ف (لا)} = \{ (لا - ۱) + ب \} \text{ ف م (لا)}$$

$$\text{قب ف (لا)} = \frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = \frac{\text{ف (لا)}}{\{ (لا - ۱) + ب \} \text{ ف م (لا)}} \quad (۱)$$

$$\text{اب مساوات (۱) } \frac{\text{ف (لا)}}{\{ (لا - ۱) + ب \} \text{ ف م (لا)}} = \frac{\text{ف (لا)}}{\{ (لا - ۱) + ب \} \text{ ف م (لا)}} + \frac{\text{ف (لا)}}{\{ (لا - ۱) + ب \} \text{ ف م (لا)}} \quad (۲)$$

متانہا صحیح ہے، ۱ اور ب کوئی سے مستقل ہیں۔

اگر ہم ۱ اور ب کی قیمتیں معلوم کریں، ایسی کہ

$$\text{ف (لا - ۱) + ب} = \{ (لا - ۱) + ب \} \text{ ف م (لا)} \quad (۳)$$

$$\text{اور ف (لا - ۱) + ب} = \{ (لا - ۱) + ب \} \text{ ف م (لا)} =$$

تب ف (لا) - (۲ لا + ب) ف (لا) لا - (لا - ب) خ اور لا - (لا + ب) خ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اس لیے اُن کے حاصل ضرب (لا - لا) + ب پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں

ف (لا) - (۲ لا + ب) ف (لا) = { (لا - لا) + ب } ف (لا) مفروضہ سے نہ تو ف (لا) اور نہ ف (لا) (لا - لا) + ب پر تقسیم ہو سکتا ہے لہذا ف (لا ± ب) خ اور ف (لا ± ب) خ =

ف (لا + ب) خ کو پ + ق خ سے تعبیر کریں اور ف (لا - ب) خ کو پ - ق خ سے تعبیر کریں تو ہمیں حاصل ہوگی مساواتیں

$$۱ (لا + ب) خ + ب = پ + ق خ$$

$$۱ (لا - ب) خ + ب = پ - ق خ$$

جہاں پ اور ق محدود مقادیر ہیں ایسی کہ دونوں ممکن ہے کہ ایک ہی وقت میں صفر نہ ہوں

$$۱ لا + ب = پ$$

$$ب = ق$$

ایسی دو مثالیں جن سے معلوم ہوتا ہے کہ ۱ اور ب حقیقی محدود قیمتیں رکھتے ہیں جو وقت واحد میں دونوں صفر نہیں ہو سکتے - ۱ اور ب کی ان قیمتوں کے ساتھ

$$ف (لا) = ۱ لا + ب$$

$$ف (لا) = \frac{۱ لا + ب}{۱ لا + ب} + \frac{۱ لا + ب}{۱ لا + ب} = ۱$$

اور اس طریقہ کو یک درجی جزوی ضربی کی مثال کی طرح دہرانے سے ہم بالآخر دیکھتے ہیں کہ

$$ف (لا) = \frac{۱ لا + ب}{۱ لا + ب} + \frac{۱ لا + ب}{۱ لا + ب} + \frac{۱ لا + ب}{۱ لا + ب} + \dots = ۱$$

یہ ظاہر کرتا ضروری ہے کہ ممکن ہے کہ ۱ اور ب ایک ہی وقت میں صفر

نہ ہوں اور دوسرے مستقلوں میں سے کوئی بھی یا سب کے سب ممکن ہے کہ صفر ہوں۔

ظاہر ہے کہ یہی طریقہ ف (لا) کے دو درجی اجزائے ضربی میں سے ہر ایک کے ساتھ استعمال ہو سکتا ہے۔  
الحاصل اگر

ف (لا) = (لا - لم) (لا - لن) ..... { (لا - ل) + ب } .....  
اور ہم مندرجہ بالا طریقے علی التواتر ایک درجی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کریں اور پھر دو درجی اجزائے ضربی کے ساتھ علی التواتر استعمال کریں تو بالآخر

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ل}{(لا - لم)} + \frac{ل}{(لا - لن)} + \dots + \frac{ل}{(لا - ل)}$$

$$+ \frac{ب}{(لا - لن)} + \dots + \frac{ب}{(لا - ل)}$$

$$+ \dots + \frac{ج + لا}{(لا - ل) + ب} + \frac{ج + لا}{(لا - ل) + ب} + \dots + \frac{ج + لا}{(لا - ل) + ب}$$

جہاں آ یا تو صفر ہے یا لا کا ایک صحیح جملہ ہے۔

لیکن اگر ف (لا) کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے کمتر ہے اور یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ہم دی ہوئی کسر کو ہمیشہ فی الواقعی عمل تقسیم سے اس حالت میں تبدیل کر سکتے ہیں  $\frac{ف (لا)}{ف (لا)}$  اور تمام کسریں مساوات کے بائیں جانب کی صفر ہو جاتی ہیں جب تک کہ لا  $\neq \infty$  اس لئے آ صفر ہے اور دی ہوئی کسر معرہ جزئی کسور میں تحلیل ہو جاتی ہے۔

## دوسرے باب کی مثالیں

مندرجہ ذیل کسروں کو جزئی کسور میں تحلیل کرو:-

$$\frac{5 + 2}{3(u-1)} \quad (2) \qquad \frac{9 - 2}{(u^3-1)(u^3-1)} \quad (1)$$

$$\frac{1 + u}{1 + u^2} \quad (3) \qquad \frac{3 + u^2 + u^3}{(5 + u^2 + u^3)(1 + u)} \quad (4)$$

$$\frac{u^2 - u^2 + 1}{(u^2 - 1)^2(u^3 + 1)} \quad (7) \qquad \frac{1 + u + u^2}{4 + u + u^2 - u^3} \quad (5)$$

$$\frac{u^2 + 1}{(1 + u)^2(2 + u)^2} \quad (8) \qquad \frac{2 + u^2}{(1 + u)^2(2 - u)} \quad (6)$$

(9) ثابت کرو کہ  $\frac{5 + u}{(2 + u)(1 - u^2)}$  کے پھیلاؤ میں  $u^{10}$  کا سر

$$= \frac{1}{27} - 1$$

(10) کے پھیلاؤ میں  $u^4$  کا سر دریافت کرو۔

(11) ثابت کرو کہ  $\dots + \frac{u^6}{u^7 - 1} + \frac{u^6}{u^7 - 1} + \frac{u^6}{u^7 - 1} + \frac{1}{u - 1}$

$$\dots + \frac{u^6}{u^7 - 1} + \frac{u^6}{u^7 - 1} + \frac{u^6}{u^7 - 1} + \frac{1}{u - 1} =$$

# تیسرا باب

## مقطعات

(Determinants)

۲۸۔ مقطعات مسائل طبیعیات میں زیادہ تر پیچیدہ اور متعدد نامعلوم متغیر کی ہمزاد مساواتوں کے حل کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ہم اس باب کا آغاز آسان ہمزاد مساواتوں کی مثال سے شروع کرتے ہیں۔ اگر خطی (یعنی یک درجہ) مساواتیں

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

دی جائیں تو ابتدائی الجبرا کے طریقوں سے آسانی مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\frac{(a_1b_2 - a_2b_1)z}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)x}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\text{اور } \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ان کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

یہاں  $a_1b_2 - a_2b_1$ ،  $a_1c_2 - a_2c_1$ ،  $a_2b_1 - a_1b_2$  ہی شکل کے ہیں اس لیے ان میں سے ہر ایک کی بہ نظر سہولت ایک خاص علامت کے ذریعہ تعبیر ہو سکتی ہے :- چنانچہ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

اس متماثل مساوات کے بائیں جانب کے رکن کو مقطعہ (Determinant) کہتے ہیں اور سیدھے جانب کے رکن کو مقطعہ کا پھیلاؤ۔ اعداد  $a, b, c, d$  کو مقطعہ کے اجزائے ترکیبی (Elements) کہتے ہیں اور چونکہ ہر ایک رقم مقطعہ کے پھیلاؤ میں دو اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب ہے، یہ مقطعہ دوسرے رتبہ (Order) کا کہلاتا ہے۔

پس دوسرے رتبہ کے مقطعہ کا پھیلاؤ اس طرح مل میں آتا ہے کہ سیدھے جانب سے بائیں جانب کو نیچے کی طرف گزرنے والے وتر پر رکھے اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب لیا جائے اور اس میں سے دوسرے وتر پر رکھے اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب تفریق کیا جائے۔

لا اور ما کے نسب نماؤں کو بھی اگر اسی طرح تعبیر کیا جائے تو مساواتوں

$$a + b + c = 0$$

$$a + b + c = 0$$

کا حل یوں لکھا جاسکتا ہے:

$$(1) \dots\dots\dots \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

جس میں ہر ایک نسب نما، سرورں کو دائری (Cyclic) ترتیب میں دو متماثل صفوں میں لکھتے ہیں، جبکہ زیر تعیین مقدار کے متعلقہ رقوم متروک کر دیئے جاتے ہیں، تیار ہوتا ہے۔

دائری ترتیب کا مفہوم یہ ہے کہ  $a$  کے بعد  $b$  لکھا جائے،  $b$  کے بعد  $c$  اور  $c$  کے بعد  $a$ ۔ گویا کہ کسی دائرے کے محیط کے گرد  $a, b, c$  سرورں کو لکھ کر ترتیب وار ایک سرے سے دوسرے سر کی طرف گزریں۔

مثال (1) --- مقطعات ذیل کو پھیلاؤ:۔

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (ii) \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (i)$$



اور (ii) حل کرو  $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$

عمل (i)  $35 - 28 = 9 \times 5 - 6 \times 8 = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$   
 $7 =$

(ii)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$(2 - 1) = 2 - 1 = (2 - 1)$

مساوات  $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$  (iii)

پہلے سے حاصل ہوتی ہے مساوات  $35 + 4 = 25 + 10$

$0 = 4 - 10 - 25$

یعنی  $0 = (3 - 1)(2 + 10)$

جس سے  $0 = 3 - 1$  یا  $0 = 2 + 10$

مثال (۲) - ہمزاد مساوات

$10 - 6 = 25 - 62 = 29$  کو حل کرو

ان مساواتوں کو مناسب ترتیب میں لکھنے سے

$0 = 25 - 62$

$0 = 29 - 62 + 10$

مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 25 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 10 \\ 29 & 2 \end{vmatrix}$

$\frac{1}{21} = \frac{8}{354} = \frac{10}{21}$

$10 = 6$  ،  $1 - 1 = 10$



اسی طرح ب، اور ج کے لیے بھی بشرطیکہ ہر صنف کے اجزائے ترکیبی دائری ترتیب میں لیے جائیں۔ ان دوسرے رتبہ کے مقطعات میں سے ہر ایک اس جزو ترکیبی کا صغیر کہلاتا ہے جو اس کو ضرب دیتا ہے۔  
لا کی قیمت کا جو جملہ ہے اس کا شمار کنندہ

$$\begin{aligned} & \text{بم} + \text{ج} + \text{د} + \text{ه} + \text{و} + \text{ز} + \text{ح} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح} \\ & = \text{ب} - (\text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح}) - (\text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح}) - (\text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح}) - (\text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح}) \\ & = \text{ب} - \text{ج} + \text{د} - \text{ه} + \text{و} - \text{ز} + \text{ح} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح} \\ & = \text{ب} - \text{ج} + \text{د} - \text{ه} + \text{و} - \text{ز} + \text{ح} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح} - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح} \end{aligned}$$

اسی بموجب ا اور ی کی قیمتوں کے شمار کنندہ مقطعات کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں۔

$$\text{پس ساداتوں} \quad \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ه} + \text{و} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ی} = ۰$$

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ه} + \text{و} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ی} = ۰$$

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ه} + \text{و} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ی} = ۰$$

کامل ذیل کی منطقاتی شکل میں لکھا جاسکتا ہے :-

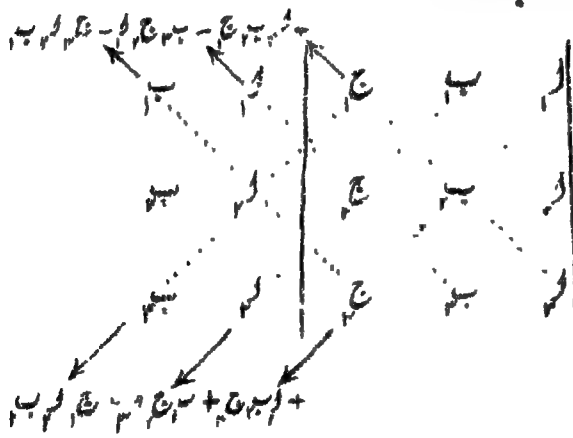
$$\text{ا} - \text{ب} - \text{ج} - \text{د} - \text{ه} - \text{و} - \text{ز} - \text{ح} - \text{ی} = ۰$$

ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ی
ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ی
ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ی
ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ی

ان کے نسب نامہ ٹیک اس طرح تیار ہوئے ہیں جیسے کہ فصل (۱) کی مساداتوں کی صورت میں چوا ہے۔ لیکن علامتیں تبادلاً منفی اور مثبت ہیں تاکہ دائری ترتیب قائم رہے۔

تیسرے رتبہ کا مقطعہ سائزس کے قاعدے (Rule of Sarrus)

سے آسانی پھیلا جاسکتا ہے۔ چنانچہ مقطعہ کے سیدھے جانب کے پہلے دو کالموں کو دہرانے کے بعد مندرجہ چھ دتروں میں سے ہر ایک پر کے اجزائے ترکیبی کے حاصل ضربوں کا مجموعہ لینے سے پھیلاؤ لکھا جاسکتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جو حاصل ضرب نیچے کی طرف لیے جاتے ہیں وہ مثبت ہیں اور جو اوپر کی طرف لیے جاتے ہیں وہ منفی ہیں۔



مثال ۳۔ مندرجہ ذیل مقطعات کو پھیلاؤ:-

۲	ج ب ط	۱	(ب)	۷	۶	۱	(۱)
ج ب ط	۱	ج ب ط		۸	۵	۲	
۱	ج ب ط	۰		۹	۴	۳	

$$\begin{vmatrix} ۵ & ۲ & ۷ & ۶ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۲ & ۶ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۲ & ۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۶ & ۱ \\ ۸ & ۵ & ۲ \\ ۹ & ۴ & ۳ \end{vmatrix} \quad (۱)$$

$$= ۲۹ - ۲۶ + ۱۳ =$$

یا سائزس کے قاعدے سے پھیلائے جے 'مقطعہ





$$= \text{لہ (بہ ج - بہ ج) + بہ (ج، لہ ج، لہ) + ج (لہ بہ - لہ بہ)}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{لہ} & \text{بہ} & \text{ج} \\ \text{لہ} & \text{بہ} & \text{ج} \\ \text{لہ} & \text{بہ} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

پس (۱) کسی مقطعہ کی قیمت نہیں تبدیل ہوتی ہے اگر اس کے کاملوں کو صفوں میں اور صفوں کو کاملوں میں تبدیل کر دیں۔

مندرجہ بالا پھیلاؤ یوں بھی لکھا جاسکتا ہے:-

$$- \{ \text{لہ (بہ ج - بہ ج) + لہ (بہ ج - بہ ج) + لہ (بہ ج - بہ ج) } -$$

$$= \begin{vmatrix} \text{لہ} & \text{لہ} & \text{لہ} \\ \text{بہ} & \text{بہ} & \text{بہ} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

پس (۲) کسی مقطعہ کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے اگر اس کی دو صفیں یا اس کے دو کامل باہم دیگر تبدیل کیے جاتے ہیں۔  
اسی پھیلاؤ سے یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ اگر  $\text{لہ} = \text{لہ}$ ،  $\text{بہ} = \text{بہ}$  اور  $\text{ج} = \text{ج}$  تو مقطعہ کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ پس

$$= \begin{vmatrix} \text{لہ} & \text{لہ} & \text{لہ} \\ \text{بہ} & \text{بہ} & \text{بہ} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

پس (۳) جب دو صفیں یا کامل متماثل ہوں تو مقطعہ صفر ہو جاتا ہے۔  
اب فرض کرو کہ  $\text{لہ}$ ،  $\text{بہ}$ ،  $\text{ج}$  کے عوض علی الترتیب  $\text{م}$ ،  $\text{لہ}$ ،  $\text{بہ}$ ،  $\text{م}$  لکھے جاتے ہیں؟

تب مقطعہ کو پھیلانے سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ل} & \text{ف} \\ \text{م} & \text{ب} & \text{ق} \\ \text{م} & \text{ج} & \text{ک} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

پس (۴) کسی صفت یا کالم کے ہر جزو ترکیبی کو کسی دیے ہوئے جزو ضربی سے ضرب دینے کا نتیجہ وہی ہوتا ہے جو مقطعہ کو اس جزو ضربی سے ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے۔

اب فرض کرو کہ  $\text{ل} = \text{م} + \text{ف} + \text{ب} = \text{ب} + \text{ق} + \text{ج} = \text{ج} + \text{ک}$  تب مقطعہ کو پھیلانے سے اس کی شکل

$$(\text{م} + \text{ف}) (\text{ب} + \text{ق} + \text{ج}) + \text{ل} (\text{ب} + \text{ج} + \text{ک}) + (\text{ب} + \text{ق} + \text{ج}) (\text{ج} + \text{ک})$$

$$= \{ \text{م} (\text{ب} + \text{ق} + \text{ج}) + \text{ل} (\text{ب} + \text{ج} + \text{ک}) + (\text{ب} + \text{ق} + \text{ج}) (\text{ج} + \text{ک}) \} + \{ \text{ف} (\text{ب} + \text{ق} + \text{ج}) + \text{ل} (\text{ب} + \text{ج} + \text{ک}) + (\text{ب} + \text{ق} + \text{ج}) (\text{ج} + \text{ک}) \}$$

جو تین درجے کے دو مقطعوں کے پھیلاؤں کا مجموعہ ہے۔ پس

$$\begin{vmatrix} \text{م} + \text{ف} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} + \text{ق} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} + \text{ک} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ل} & \text{ف} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ق} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ک} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

پس (۵) جب کسی صفت یا کالم کا ہر ایک جزو ترکیبی دو یا زائد رقموں کے جبری مجموعہ پر مشتمل ہوتا ہے تو مقطعہ دو یا زائد مقطعوں کا حاصل جمع ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک کا جزو ترکیبی ایک واحد رقم پر مشتمل ہوتا ہے۔







۳	۰	۰	۲	=	۳	۰	۰	۲	=
۲	۱	۵	-۲		۲	۱	۳	۳	
۳	۳	۹	۱۲-		۳	۴	۱۱-	۱۲-	
۵	۶	۲۱	۱۸-		۵	۶	۱۰	۱۸-	

پہلے کالم کے دو چند اور چوتھے کالم کے حاصل جمع کو دوسرے کالم میں سے  
وضع کرنے سے :

۱	۵-	۳	۳-	۲	۱	۵-	۲	=
۳	۹	۱۲-		۳	۴-	۹		
۶	۲۱	۱۸-		۵	۶-	۲۱		

اور چوتھے (۳)	۱۳	۱۲	۲	=	۱	۵-	۱	۹-	۰	۱	۰	۲	=
	۳۵	۱۶			۳	۹	۳-		۱۲	۳-	۱۳		
					۶	۲۱	۶-		۱۲	۳-	۲۵		

۶۳۸ =	۱	۲۱	۲	=
	۲۸	۱۶		

۱۵	۵-	۳	۱۵	۲	=	۱۵	۶	۱۲-	۸	۳	=	اور قی
۱۱	۰	۸	۱۲			۱۱	۳	۳-	۱۱			
۱۶	۱-	۲۶	۲۶			۱۶	۱۱-	۱۰	۲۸			
۱۹	۲۸-	۱۹-	۶			۱۹	۱۰	۲۸-	۳-			

کالموں ۱ اور ۳، ۲ اور ۴، ۲ اور ۳ کو جمع کرنے سے

۰	۰	۳	۰	$\frac{۲}{۳}$	=	۱۵	۱۵-	۳	۱۵	$\frac{۲}{۳}$	=
۱۱	۱۳	۸	۲۶-			۱۱	۰	۸	۱۲		
۱۳	۲۳	۲۶	۱۰۳-			۱۶	۳-	۲۶	۲۶		
۶۵	۶۶-	۱۹-	۱۰۲			۱۹	۸۲-	۱۹-	۶		

کالم ۲ کے ۵ گئے کو کالم ۱ میں سے تفریق کرنے اور کالموں ۱ اور

۳ کو، اور ۳ اور ۴ کو جمع کرنے سے

۱-	۱۱	۳	۲- =	۲۶-	۱۱	۱۲	۲- =		
۶۶-	۱۳	۱۱		۱۰۳-	۱۳	۲۲			
۲۰-	۶۵-	۱۲-		۱۰۲	۶۵-	۶۶-			
۱	.	.	۲ =	۱	۲	۳	۲ =		
۶۶	۱۵۲-	۳۵-		۶۶	۲۰۰	۱۱			
۲۰	۱۰۹-	۲۳-		۲۰	۲۹-	۱۲-			
۶۳۸ =	۱۲	۱-	۲ =	۱۲	۲۵	۲ =	۱۵۲	۳۵	۲ =
	۱۶	۲۸-		۱۶	۲۳		۱۰۹	۱۳	

پس لا =  $\frac{۱۱}{۱۰۰}$

یہ قیمت پہلی 'دوسری اور چوتھی مساواتوں میں درج کرنے سے مساواتوں کا نظم:

$$۰ = ۱۹ + ۱۵ + ۷ ی + ۱۲ -$$

$$۰ = ۲۲ + ۱۱ + ۳ ی + ۳ -$$

$$۰ = ۱ - ۱۹ + ۱۰ ی + ۳۸ -$$

ہو جاتا ہے جس کا حل یہ ہے:

۱ - ۳ - ی - ۱۰ -

۱۵ ۷ ۱۲ -	۷ ۱۲ - ۱۹	۱۲ - ۱۹ ۱۵	۱۹ ۱۵ ۷
۱۱ ۳ ۲ -	۳ ۳ - ۲۲	۳ - ۲۲ ۱۱	۲۲ ۱۱ ۳
۱۹ ۱۰ ۳۸ -	۱۰ ۳۸ - ۱ -	۳۸ - ۱ - ۱۹	۱ - ۱۹ ۱۰

ان میں سے

۰ ۱ ۰ =	۵ ۱ ۷ =	۴ ۴ ۷ =	۱۹ ۱۵ ۷
۷ - ۵ ۲۲ -	۷ - ۵ ۳	۱۲ ۵ ۳	۲۲ ۱۱ ۳
۱۶ - ۱ ۱۷	۱۶ - ۱ - ۱۰	۱۰ - ۱ - ۱۰	۱ - ۱۹ ۱۰

$$631 = \begin{vmatrix} 32 & 4 \\ 16 & 14 \end{vmatrix} =$$

اسی طرح دوسرے مقطعات کو پھیلائے سے

$$\frac{1}{631} = \frac{س}{1893} = \frac{ی}{1242} = \frac{لا}{631}$$

جس سے  
۳- = ۲- = ۱- = ۰  
۲ قیمتیں تیسری مساوات کے لیے بھی صادق آتی ہیں! پس مساواتوں کا مکمل حل مل گیا ہے۔

۳۲- استقراط — جب خطی متجانس مساواتوں کا ایک نظام غیر معلوم متغیر کی تعداد سے زیادہ مساواتوں پر مشتمل ہوتا ہے تو عموماً یہ ممکن نہیں کہ غیر معلوم متغیر کی قیمتیں دریافت کی جائیں جو ایک ساتھ (وقت واحد میں) اس نظام کے لیے صادق آئیں جب کہ تمام مساواتیں ایک دوسرے کے غیر تابع ہوتی ہیں۔

جب قیمتوں کا ایک مکمل جٹ ایک ساتھ (وقت واحد میں) غیر معلوم متغیر کی (م + ن) مساواتوں کے نظام کے لیے فی الواقع صادق آتا ہے تو ان مساواتوں میں سے م مساواتیں غیر تابع نہیں ہوتی ہیں اور ایسا نظام باثبات (Consistent) کہلاتا ہے۔

$$\text{فرض کرو} \quad \begin{matrix} ۱م + ۲لا + ۳بم + ۴جی + ۵د = ۰ \\ ۱م + ۲لا + ۳بم + ۴جی + ۵د = ۰ \\ ۱م + ۲لا + ۳بم + ۴جی + ۵د = ۰ \\ ۱م + ۲لا + ۳بم + ۴جی + ۵د = ۰ \end{matrix}$$

$$۱م + ۲لا + ۳بم + ۴جی + ۵د = ۰$$

$$۱م + ۲لا + ۳بم + ۴جی + ۵د = ۰$$

$$۱م + ۲لا + ۳بم + ۴جی + ۵د = ۰$$

ایک باثبات نظام ہے۔ تب آخری تین مساواتوں سے

۱	۲	۳	۴	۵
۱م	۲لا	۳بم	۴جی	۵د
۱م	۲لا	۳بم	۴جی	۵د
۱م	۲لا	۳بم	۴جی	۵د

لا، ما اور ی کی قیمتیں پہلی مساوات میں درج کرنے اور سب کو مشترک  
نسب نما سے اس کی علامت تبدیل کر کے ضرب دینے سے

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \\ \hline \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \\ \hline \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \\ \hline \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \\ \hline \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \end{array}$$

(۵) یعنی

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \\ \hline \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \\ \hline \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \\ \hline \text{لا} & \text{بم} & \text{ج} & \text{د} & \text{ب} \end{array}$$

یہ اس امر کی شرط ہے کہ نظام باثبات ہو: متجانس خطی مساواتوں  
پس  $n$  غیر معلوم مقادیر میں  $(n+1)$  متجانس خطی مساواتوں  
کا نظام باثبات ہوتا ہے جبکہ سروں کا مقطعہ صفر ہوتا ہے۔  
شرط (۵) کو دیے ہوئے نظام میں لا، ما اور ی کا حاصل انشاء  
(Eliminant) بھی کہتے ہیں۔

مثال (۱۷) - ذیل کی تین مساواتوں

$$\text{لا} + \text{بم} + \text{ج} + \text{د} = ۰$$

$$\text{لا} + \text{بم} + \text{ج} + \text{د} = ۰$$

$$\text{لا} + \text{بم} + \text{ج} + \text{د} = ۰$$

کے باثبات ہونے کی شرط کو ایک مقطعہ کی شکل میں ظاہر کرو۔

اگر  $\frac{\text{لا} - \text{لا} ۲}{\text{لا}} = \frac{\text{ما} + \text{ی}}{\text{لا}} = \frac{-\text{لا} ۲ - \text{ما} + \text{ی}}{\text{لا}}$

تو ایک مساوات حاصل کرو جس سے م دریافت ہو جائے۔  
 اس مساوات کو حل کرو اور متعلقہ دھلوں کے متناظر لا، ما اور ی  
 کی باہمی نسبتیں دریافت کرو۔  
 [جامعہ لندن]  
 دی ہوئی مساوات ٹھیک اس شکل میں نہیں ہے جو فصل (۲۲) میں  
 دی گئی ہے۔ لیکن اگر غیر معلوم متغیر کو لا، ما اور ی کی نسبتیں تصور  
 کیا جائے جو ہر ایک مساوات کو بالکلیہ لا، ما، ی میں سے کسی ایک  
 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوں تو وہ فوراً فصل (۲۲) والی شکل میں منتقل  
 ہو جاتی کہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ

$$م = \frac{ل}{ی} \quad \text{اور} \quad و = \frac{ا}{ی}$$

تب یہ فرض کر کے کہ ی کی قیمت صفر نہیں ہے۔ نظام

$$ل + م + و + ج = ۰$$

$$ل + م + و + ج = ۰$$

$$ل + م + و + ج = ۰$$

ہو جاتا ہے۔ پس (۵) کی رو سے اس نظام کے باثبات ہونے کی  
 شرط یہ ہوتی ہے:-

$$۰ = \begin{vmatrix} ل & م & و \\ ل & م & و \\ ل & م & و \end{vmatrix}$$

یہ دیے ہوئے نظام میں لا، ما، ی کا حاصل اسقاط ہے۔

دوسرے نظام میں کسور کو صاف کر د اور لا، ما، ی کو م  
 اور و میں داخل بنائیں تب

$$۰ = ۲ - (۵) ۶$$

$$۰ = ۱ + ۳ - ۵$$

$$۰ = ۲ - ۱ + ۳ - ۵$$





۰	۱	۰	۰	=	۴	۱	۰	۲	=	ق
۱۲	۰	۴	۲		۲۰	۰	۴	۴		
۳	۲	۱	۱		۷	۲	۱	۵		
۳۸۳	۱۲۸	۱۲۲	۱۲۲		۹۶	۱۲۸	۱۲۲			
۴	۲	۲	۳	=	۴	۲	۱۲		=	
۱	۱	۱			۱	۱	۳			
۱۲۸	۴۲	۱۲۴	۱۲۸		۱۲۸	۴۲	۱۲۴	۳۸۳		
۱۲۲	۱۲۲	۱	۳	=	۴	۲	۲	۳	=	
۱۲۸	۱				۱۲۸	۴۲	۱۲۲			

$$۹ (۴ - ۸) (۸ - ۸) =$$

پس جب  $۱۰ = ۴$  یا  $۸$  ہو تو  
 یہ نامنظم ہو کہ ان میں سے ایک شرط غیر تابع نہیں ہے۔ کیونکہ وہ دوسرے  
 سے مشتق ہوتی ہے جبکہ  $۸$  ابھی ابھی معین کی ہوئی دو قیمتوں میں سے کوئی  
 ایک قیمت رکھتا ہے۔ چنانچہ  $۸ = ۸$  لیں اور پہلی اور دوسری  
 مساواتوں کو - ۳۱ اور ۱۶ سے علی الترتیب ضرب دیں اور جمع کریں تو  
 حاصل مساوات

$$۱۸ + ۱۶ + ۱۲ = ۱۲$$

ہوتی ہے۔ یہ چوتھی مساوات ہے،  $۸$  کی قیمت درج کر لے اور ایک سرے  
 سے لے کر دوسرے سرے تک تمام کو  $۸$  پر تقسیم کرنے سے حاصل  
 ہوتی ہے۔

### باب (۳) کی مثالیں

مندرجہ ذیل مقطعات کی قیمتیں دریافت کرو :-

۲۷	۹۱	۳۱	(۲)	۲۷	۴	۱	(۱)
۳۰	۲۹	۱۳		۶۴	۶	۲	
۳۷	۳۶	۲۱		۱۲۵	۱۶	۳	

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	(۴)	$\begin{vmatrix} 11 & 2- & 34 \\ 3 & 2 & 16 \\ 2- & 3 & 5 \end{vmatrix}$	(۳)
$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	(۶)	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	(۵)
مثبت کرو کہ			
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	=	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	(۷)
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	=	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	(۸)
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 3- & 4- & 1 \\ 3- & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	=	$\begin{vmatrix} 5 & 3- & 2 & 1 \\ 1- & 8- & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3- & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	(۹)

مقطعات کے ذریعہ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

$$21 = 5 + 13 - 11 \quad (10)$$

$$12 = 5 - 6 + 11$$

$$2 = 3 + 6 + 11$$

$$(۱۱) \quad ۱ = ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ \quad (۱۲) \quad ۱۲ = ۱۱ + ۱$$

$$۱۱ = ۱۰ + ۱ \quad ۱۰ = ۹ + ۱ \quad ۹ = ۸ + ۱ \quad ۸ = ۷ + ۱ \quad ۷ = ۶ + ۱ \quad ۶ = ۵ + ۱ \quad ۵ = ۴ + ۱ \quad ۴ = ۳ + ۱ \quad ۳ = ۲ + ۱ \quad ۲ = ۱ + ۱$$

$$۳۸ = ۳۷ + ۱ \quad ۳۷ = ۳۶ + ۱ \quad ۳۶ = ۳۵ + ۱ \quad ۳۵ = ۳۴ + ۱ \quad ۳۴ = ۳۳ + ۱ \quad ۳۳ = ۳۲ + ۱ \quad ۳۲ = ۳۱ + ۱ \quad ۳۱ = ۳۰ + ۱ \quad ۳۰ = ۲۹ + ۱ \quad ۲۹ = ۲۸ + ۱$$

(۱۳) ثابِت کر دے کہ ان تمام اعداد میں ۱ اور ۲ کے مجموعہ کا برابر ۱۰ ہے۔  
ایک مشترک اہل کہتے ہیں تو

$$(۱۴) \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۱ \times ۴ - ۲ \times ۳ = ۴ - ۶ = -۲$$

$$(۱۵) \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = ۱(۵ \times ۹ - ۶ \times ۸) - ۲(۴ \times ۹ - ۷ \times ۶) + ۳(۴ \times ۸ - ۷ \times ۷) = ۱(۴۵ - ۴۸) - ۲(۳۶ - ۴۲) + ۳(۳۲ - ۴۹) = ۱(-۳) - ۲(-۶) + ۳(-۱۷) = -۳ + ۱۲ - ۵۱ = -۴۲$$

اور ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۴۵  
پہر ثابِت کر دے کہ

$$(۱۶) \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{vmatrix} = ۱(۵ \times ۹ - ۶ \times ۸) - ۲(۴ \times ۹ - ۷ \times ۶) + ۳(۴ \times ۸ - ۷ \times ۷) = ۱(۴۵ - ۴۸) - ۲(۳۶ - ۴۲) + ۳(۳۲ - ۴۹) = -۳ + ۱۲ - ۵۱ = -۴۲$$

(۱۷) دریافت کر دے کہ کس قیمت یا کن قیمتوں کے لیے ذیل کی مساویات  
موافق اور درست ہوتی ہیں۔

$$\begin{aligned} ۱۱ &= ۱۰ + ۱ \\ ۱۲ &= ۱۰ + ۲ \\ ۱۳ &= ۱۰ + ۳ \end{aligned}$$

(۱۸) ثبات کرو کہ اگر

$$\begin{aligned} ۱۰ &= ۱۰ + ۰ \\ ۱۱ &= ۱۰ + ۱ \\ ۱۲ &= ۱۰ + ۲ \\ ۱۳ &= ۱۰ + ۳ \end{aligned}$$

کا ایک مشترک حل ہے تو ہمیشہ ایسے تین عدد 'ل'، 'ک'، 'م' دریافت ہو سکتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} ۱۰ &= ۱۰ + ۰ + ۰ \\ ۱۱ &= ۱۰ + ۱ + ۰ \\ ۱۲ &= ۱۰ + ۲ + ۰ \\ ۱۳ &= ۱۰ + ۳ + ۰ \end{aligned}$$

## چوتھا باب

### مسئلہ قوت نما۔ لوکار تم اور لوکار تمی سلسلہ

۳۴۔ مسئلہ قوت نما۔ اگر  $\frac{1}{n}$  عدداً اکائی سے کم ہو تو  $(1 + \frac{1}{n})^n$  کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پیمائے جاسکتے ہیں۔ اور

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (1+1)}{n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} + \dots$$

ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں :-

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (1+1)}{n!} + \dots$$

لا = ۱ کہئے

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (1+1)}{n!} + \dots$$

لیکن  $(1 + \frac{1}{n})^n = \left\{ (1 + \frac{1}{n})^n \right\}^1$  - پس

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (1+1)}{n!} + \dots$$

$$\{ \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{1} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} + 1 + 1 \} =$$

مصرعہ بالا تعلق ن کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے خواہ وہ کتنی ہی بڑی کیوں نہ ہوں اور اس لیے اس صورت میں بھی صحیح ہے جب کہ  $n = \infty$  لیکن جب  $n = \infty$  تو  $\frac{1}{n} = 0$  صفر اور تعلق مذکور ذیل کی صورت اختیار کرتا ہے۔ \*

$$1 + 1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + 1 + 1 + \dots =$$

اگر ہم سلسلہ  $1 + 1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \dots$  کو وے تعبیر کریں تو مسئلہ قوت نما ظاہر ہوتا ہے، یعنی

$$1 + 1 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \dots =$$

یہاں یہ بیان کر دیا جاتا ہے کہ  $1$  کا مندرجہ بالا سلسلہ  $1$  کی تمام قیمتوں کے لیے مستند ہے۔

۳۴۔ مقدار قوت کو ریاضی میں بڑی اہمیت حاصل ہے۔

یہ امر واضح ہے کہ قوت باعتبار قیمت ۲ سے بڑا ہے اور وہ مسلسل  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + \dots$  سے اور اس لیے ۲ سے چھوڑا ہے۔ حسابی عمل سے اس کی قیمت  $1.8421 \dots$  برآورد ہوتی ہے۔

اس بارے میں زیادہ احتیاط کے ساتھ امتحان کرنے کی ضرورت ہے نہ صرف ہر رقم کی ہدایت معلوم کرنے کے لیے بلکہ اس وجہ سے بھی کہ کسی عامل جمع کی ہدایت ضرور نہیں کہ اس کی رقموں کی ہدایتوں کے حامل جمع کے مساوی ہو، آلا اس صورت میں کہ اس کی رقموں کی تعداد معتدلی ہو۔ اس موقع پر یہ امتحان ضرور کر دیا گیا ہے اس لیے کہ ابند کی فصل (۳۵) میں بر تحقیق عمل میں لائی گئی ہے اس سے زیادہ منع ہے۔

قوت کے غیر متبائن ہونے کا ثبوت۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ قوت  $\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$  جس میں  $m$  اور  $n$  دونوں صحیح عدد ہیں۔ پس چاہیے کہ

$$\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^7} + \frac{1}{n^8} + \frac{1}{n^9} + \frac{1}{n^{10}} + \dots$$

دونوں جانب،  $n$  سے ضرب دو۔ تب سلسلہ کی تمام رقیں صحیح عدد بن جائیگی باستثناء

$$\frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)} + \dots$$

پس ہمارے مفروضہ کے بموجب

$$\frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)} + \dots$$

ایک صحیح عدد ہونا چاہیے۔ لیکن یہ محال جمع

$$\frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)} + \dots$$

ہے اور اس لیے

$$\frac{1}{(1+n)} = \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)} + \frac{1}{(1+n)} + \dots$$

یعنی  $\frac{1}{n}$  سے چھٹا ہے۔ پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ مقدار فوق متوافق عدد  $\frac{1}{n}$  کے مساوی نہیں ہو سکتی۔

۳۵۔ مسئلہ قوت نما کی بابت کوشی (Cauchy)

کا ثبوت۔ (مسئلہ ثنائی کو صرف مثبت صحیح قوت نما کی حد تک درست مان کر)

$$\frac{1}{n^m} + \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{m+2}} + \frac{1}{n^{m+3}} + \frac{1}{n^{m+4}} + \dots$$

فرض کرو کہ  $n$  (م) سلسلہ  $1 + m + \frac{m^2}{n} + \frac{m^3}{n^2} + \frac{m^4}{n^3} + \frac{m^5}{n^4} + \dots$

کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{پس ف (م)} = 1 + م + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(م-1)!} + \frac{1}{م!}$$

$$\text{ف (ن)} = 1 + ن + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(ن-1)!} + \frac{1}{ن!}$$

$$\text{اور ف (م+ن)} = 1 + (م+ن) + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(م+ن-1)!} + \frac{1}{(م+ن)!}$$

اب 'ف (م) × ف (ن)' میں 'م' 'ن' کا سرسہ  $\frac{1}{(م+ن)!}$  اور ف (م+ن) میں رقم 'م' 'ن'

صرف  $\frac{(م+ن)!}{(م! ن!)}$  ہی میں واقع ہو سکتی ہے اور اس لیے اس کا سر  $\frac{(م+ن)!}{(م! ن!)}$

یعنی  $\frac{1}{(م+ن)!}$  ہو گا۔

پس چونکہ سلسلے ف (م)، ف (ن)، اور ف (م+ن)، م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہیں اور کسی رقم 'م' 'ن' کا سر ف (م) × ف (ن) میں وہی ہے جو ف (م+ن) میں ہے لہذا اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$$\text{ف (م)} \times \text{ف (ن)} = \text{ف (م+ن)} \quad (۱)$$

م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے۔

اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ تب (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \dots \times \text{ف (۱)} = \text{ف (۱+۱+۱+...+۱)}$$

$$\text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \dots \times \text{ف (۱)} = \text{ف (۱+۱+۱+...+۱)}$$

$$\text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \dots \times \text{ف (۱)} = \text{ف (۱+۱+۱+...+۱)} \quad (۲)$$

اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت کسر ہے جس میں پ اور ق

مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ









۱ = لوکروا سے ہوتا ہے۔  
 ہم اب لوکارتوں کے چند اساسی خواص بیان کریں گے اور ان کے درشت کرنے کے طریقے اور ان کے ذریعہ بعض تقریبی حسابات کا مختصر عمل بتائیں گے۔  
 لوکارتوں کے خواص سے طالب علم کو یقیناً انٹرمیڈیٹ کے نصاب علم مثلث کی تکمیل میں ابھی واقفیت ہوگئی ہوگی۔ سہولت کی خاطر یہ خواص یہاں بیان کر دیے جاتے ہیں :

(۱) اساس خواہ کچھ ہی ہو ا کا لوکارت صفر ہے۔  
 (۲) کسی حامل ضرب کا لوکارت اس کے اجزائے ضربی کے لوکارتوں کا حامل جمع ہے۔  
 مثلاً لوک (لا مای.....) = لوک لا + لوک ما + لوک می + .....  
 (۳) کسی خارج قسمت کا لوکارت مقسوم اور مقسوم علیہ کے لوکارتوں کا جبری تفاوت ہے۔

مثلاً لوک  $\frac{ا}{ب}$  = لوک لا - لوک ب  
 (۴) کسی عدد کی کسی قوت کا لوکارت اس عدد کے لوکارت اور اس قوت کے قوت نما کا حامل ضرب ہے۔

مثلاً لوک لان = ن لوک لا  
 (۵) کسی عدد کا لوکارت با اساس ۱۰ اگر معلوم ہو تو اس کا لوکارت با اساس ب معلوم ہوگا۔  
 ب معلومہ لوکارت کو مستقل لوک ب کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہو جاتا ہے۔

مثلاً لوک لا = لوک لا × لوک ب اور لوک لا × لوک ب = لوک ب

۳۔ لوکارتی سلسلہ - فرض کر دو کہ ۱ = وک

پس ک = وک و - تب

۱ = واک = واک و - پس

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \text{لاؤکسر } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \text{ (لاؤکسر } 1)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \text{تب}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \text{لاؤکسر } (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n})$$

اب بشرطیکہ ما عدد اکائی سے کم ہو (1 + 1) کو مسئلہ ثانی کے ذریعہ پھیلا سکتے ہیں۔ تب

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \text{لاؤکسر } (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n})$$

اِس جانب کا سلسلہ 'لاؤکسر' کی سب قیمتوں کے لیے مستحق ہے اور  
 سیدھے جانب کا سلسلہ 'لاؤکسر' کی سب قیمتوں کے لیے مستحق ہے 'بشرطیکہ' ما کی  
 قیمت عدد اکائی سے کم ہو۔ پس ما کی ایسی قیمتوں کے لیے ہم مساوات کے  
 دونوں جانب کے لا کے اسروں کو باہم دیگر مساوی کھ سکتے ہیں اس طرح ہمیں  
 حاصل ہوتی ہے مساوات

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

یہ لوکارتمی سلسلہ کہلاتا ہے۔

۳۸۔ کسی عدد کے لوکارتم کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں جو مشقت اٹھانی  
 ہوتی ہے اس کو گھٹانے کے لیے اسی لوکارتمی سلسلہ سے اس سے زیادہ عسرت  
 کے مستحق سلسلے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \text{لاؤکسر } (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n})$$

میں ما کی علامت کو تبدیل کرنے سے سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \text{لاؤکسر } (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n})$$

برآمد ہوتا ہے

$$\text{پس لوکر } \frac{1+1}{1-1} = \text{لوکر } (1+1) - \text{لوکر } (1-1)$$

$$(2) \dots\dots\dots (2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\dots\dots$$

$$\frac{1+1}{1-1} \text{ کے بجائے } \frac{1}{2} \text{ لکھو اور اس لیے } \frac{1}{2} \text{ کے بجائے } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ تب}$$

$$\text{لوکر } \frac{1}{2} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \dots\dots\dots \right\} \dots\dots\dots (3)$$

اس سے اب ہم بغیر بہت زیادہ مشقت کے، تو کے اساس پر لوکار تم  
محبوب کر سکتے ہیں۔ بطور مثال :

ضابطہ (۴) میں  $m = 2$  اور  $n = 1$  لکھو۔ تب

$$\text{لوکر } 2 = \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \dots\dots\dots \right\}$$

جس سے لوکر ۲ کی قیمت  $\dots\dots\dots ۰.۶۹۳۱۴۷$  یا سانی محسوب  
ہو جاتی ہے۔

لوکر ۲ معلوم کر لینے کے بعد ضابطہ (۴) سے لوکر ۳ کی قیمت  
اس طرح دریافت ہو سکتی ہے۔

$$\text{لوکر } 3 = \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \dots\dots\dots \right\}$$

$$\dots\dots\dots ۰.۶۰۵۳۶۵ =$$

$$\text{پس لوکر } 3 = ۰.۶۹۳۱۴۷ + ۰.۶۰۵۳۶۵ = ۱.۲۹۸۵۱۲$$

اس طریقہ پر عمل کرنے سے، تو کے اساس پر کسی عدد کا لوکار تم بھی جس  
تقریبی درجہ تک دریافت کرنا مقصود ہو، دریافت ہو سکتا ہے۔

۳۹۔ تو کے اساس پر جو لوکار تم محسوب کیے جاتے ہیں نیپیری  
یا طبعی لوکار تم کہلاتے ہیں۔

تمام نظری تحقیقات میں نیپیری لوکار تم استعمال کیے جاتے ہیں۔ لیکن

جب لوکارتوں کے ذریعہ تقریبی عددی حسابات حل میں آتے ہیں تو بعض درجہ کے لحاظ سے جن کا عنقریب ذکر آئیگا ہمیشہ ۱۰ کے اساس والے لوکارتم استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم معمولی لوکارتم کہلاتے ہیں۔

ہم نے ابھی بتایا ہے کہ تو کے اساس والے لوکارتم کس طرح دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ جب تو کے اساس کے لوکارتم معلوم ہو جاتے ہیں تو ان کو مستقل جزو ضربی لوکب و یا محراب سے ضرب دینے سے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مستقل جزو ضربی مقیاس (Modulus) کہلاتا ہے۔ اس کی قیمت ۰.۴۳۴۲۹ ہے۔

### سوالات کے (۱)

ثابت کرو کہ :

$$(۱) \text{ لوک } (n + ۱) = \text{لوک } n + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n}) + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n+1}) + \dots + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n-1}) + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n})$$

$$(۲) \text{ لوک } ۱۲ = 1 + \frac{1}{۱۲} (1 + \frac{1}{۱۲}) + \frac{1}{۲۴} (1 + \frac{1}{۲۴}) + \frac{1}{۳۶} (1 + \frac{1}{۳۶}) + \dots + \frac{1}{۱۲} (1 + \frac{1}{۱۲}) + \dots$$

$$(۳) \text{ لوک } ۱۰ = 1 + \frac{1}{۱۰} (1 + \frac{1}{۱۰}) + \frac{1}{۲۰} (1 + \frac{1}{۲۰}) + \frac{1}{۳۰} (1 + \frac{1}{۳۰}) + \dots + \frac{1}{۱۰} (1 + \frac{1}{۱۰}) + \dots$$

$$(۴) \text{ لوک } ۲ = \frac{1}{۲} + \frac{1}{۲ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۴} + \frac{1}{۴ \times ۵} + \dots + \frac{1}{۲ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۴} + \frac{1}{۴ \times ۵} + \dots$$

$$(۵) \text{ لوک } ۲ = ۱ - \frac{1}{۲} + \frac{1}{۲ \times ۳} - \frac{1}{۳ \times ۴} + \frac{1}{۴ \times ۵} - \frac{1}{۵ \times ۶} + \dots + \frac{1}{۲ \times ۳} - \frac{1}{۳ \times ۴} + \frac{1}{۴ \times ۵} - \frac{1}{۵ \times ۶} + \dots$$

$$(۷) \text{ لوگ } ۱ = \frac{1-۱}{1+۱} + \frac{1-۱}{1+۱} + \frac{1-۱}{1+۱} + \dots = \frac{1-۱}{1+۱} + \frac{1-۱}{1+۱} + \frac{1-۱}{1+۱} + \dots$$

$$(۸) \text{ لوگ } ۱ = \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \dots = \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \dots$$

$$(۹) \text{ } ۱ = \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \dots = \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \dots$$

$$(۱۰) \left\{ \text{لوگ } (۱+۱) = \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \dots \right\}$$

(۱۱) اگر لوگ  $(۱+۱+۱)$  کو لاکھ قوتوں میں پھیلاؤں تو لاکھ سر یا تو  $\frac{۱}{۱}$  ہے یا  $\frac{۱}{۱}$  - ان صورتوں میں امتیاز کرو۔

$$(۱۲) \text{ مثلاً } ۱ = \text{لوگ } (۱-۱) = \text{لوگ } (۱-۱+۱) = \text{لوگ } (۱-۱+۱+۱) = \dots$$

$$۱ = \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \dots = \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱+۱} + \dots$$

$$(۱۳) \frac{۱-۱}{۱+۱} \text{ کے پھیلاؤ میں لاکھ سر } \frac{۱}{۱} \left\{ \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \dots \right\}$$

اس کے ذریعہ سے سلسلوں  $۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$  اور  $۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$  کی ن رقموں کے حاصل جمع دریافت کرو۔

$$(۱۴) \text{ "و" کے پھیلاؤ میں اگر لاکھ سر لکھو تو}$$

$$\left\{ \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \dots \right\} \frac{۱}{۱} = \text{لکھ}$$

$$\text{پس } ۱ = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \dots$$

$$(۱۵) \text{ سلسلہ } \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \dots \text{ کے ن رقموں کا حاصل جمع}$$

(۱+۱) میں رقم سے اگر آغاز کیا جائے تو لوگ  $۱$  کے مساوی ہوتا ہے جبکہ  $۱$  بلا انتہا بڑھایا جاتا ہے۔

$$(۱۶) \text{ لوگ } (۱+۱) > \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \dots > ۱ + \text{لوگ } (۱+۱)$$





یعنی یہ لوکارتم  $n-1$  + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔

بناء بریں ایک سے بڑے کسی بھی عدد کے لوکارتم کا صمیتن اس عدد کے صحیح حصہ کی (رقم کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔

اگر دیا ہوا عدد ایک سے کم یعنی صرف اعشاریہ ہی پر مشتمل ہو اور اس کی سب سے پہلی ملحوظ رقم کے آگے  $n$  صفر ہوں تو دیا ہوا عدد  $10^{-n}$  اس سے بڑا مگر  $10^{-n}$  سے چھوٹا ہوگا۔ پس چونکہ لوکارتم کا اعشاریہ والا حصہ ہمیشہ مثبت رہنا چاہیے اس عدد کا لوکارتم  $-(n+1)$  + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔

پس اگر کوئی عدد ایک سے کم ہو اور اعشاریہ کی شکل میں لکھا گیا ہو تو اس کے لوکارتم کا صمیتن منفی اور دیے ہوئے عدد کی پہلی ملحوظ رقم سے پہلے لکھے ہوئے صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگا۔

مثلاً  $2541.2$  کے لوکارتم کا میٹر  $3$  اور  $3541.2 \dots$  کا میٹر  $4$ ۔  
۴۴۔ کسی دیے ہوئے عدد کے لوکارتم کی تعیین متناسب تفاضل کے اصول کے ذریعہ۔

اگر کسی عدد کی ملحوظ رقموں کی تعداد، لوکارتموں کی جدول میں دیے ہوئے عددوں کی رقموں کی تعداد سے زیادہ ہو اور جدول کے دو متواتر عددوں کا تفاوت ان ہر دو عددوں کے تفاوت کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو ان عددوں کے لوکارتموں کا تفاوت خود ان کے تفاوت کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\begin{aligned} \text{لوک } (n+1) - \text{لوک } n &= \text{لوک } (1 + \frac{1}{n}) = \text{من } \text{رک } (1 + \frac{1}{n}) \\ &= \text{من } (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \dots) = \text{من } \frac{1}{n} \text{ تقریباً جبکہ } \frac{1}{n} \text{ بہت} \\ &\text{چھوٹا ہوتا ہے۔ من سے مراد مقیاس } \frac{1}{10} \text{ ہے۔} \end{aligned}$$

طالب علم کو لوکارتمی جدولوں سے استفادہ کرنے میں کافی مشق ہوگی۔

اس لیے عملی کام میں مزید ہدایات کی ضرورت نہیں سمجھی گئی۔

### سود مرکب اور سالیانے

۴۴۔ سود مرکب اور سالیانوں کے تمام سوالات مندرجہ ذیل تین سوالوں کے تابع ہیں:-

(۱) ایک مقررہ تعداد سال کے لیے ایک مقررہ شرح سود سے سود مرکب پر قرض دیے ہوئے روپیہ کے کل زر کی تعیین۔  
فرض کرو کہ اصل رقم پ، تعداد سال ن، شرح سود فی صد فی سال ۱۰۰ ر ہے اور مطلوبہ کل زر  $R$  ہے۔  
تب پ کا سود ایک سال کے لیے پ ر ہے اور پہلے سال کے ختم پر کل زر یعنی اصل مع سود پ  $(1 + \frac{R}{100})$  ہے۔ اب دوسرے سال اس روپیہ کو اصل مان کر سود محسوب کیا جاتا ہے۔ پس دوسرے سال کے ختم پر کل زر  $\{ پ (1 + \frac{R}{100}) (1 + \frac{R}{100}) = پ (1 + \frac{R}{100})^2 \}$  ہوگا۔ اسی طرح ن سالوں کے ختم پر کل زر پ  $(1 + \frac{R}{100})^n$  ہوگا۔

یعنی  $R = پ (1 + \frac{R}{100})^n$

اور لوگ  $R = لوگ پ + ن لوگ (1 + \frac{R}{100})$

اگر سود نصف نصف سال کے ختم پر محسوب ہو کر اصل میں جمع کیا جاتا ہے تو واضح ہے کہ ن سال کا کل زر  $پ (1 + \frac{R}{200})^{2n}$  ہوگا۔

(۲) کسی ایسے روپیہ کی حاضری قیمت کی تعیین جسے ایک مقررہ شرح سود مرکب سے ایک مقررہ مدت کے بعد واجب الادا ہے۔

فرض کرو کہ  $R$  روپیہ ن سال کے بعد واجب الادا ہے اور شرح سود ۱۰۰ ر فی صد فی سال فرض کر کے پ اس کی حاضری قیمت ہے تو پ روپیہ ن سال میں ۱۰۰ ر فی صد فی سال کی شرح سے کل زر  $R$  ہو جانا چاہیے۔ پس سوال (۱) کی رو سے

$$پ = \frac{R}{(1 + \frac{R}{100})^n}$$

(۳) ن متواتر سال تک ہر سال کے ختم پر ۱ پونڈ واجب الادا سالیانہ کی حاضریہ قیمت کی تعیین۔

اگر سود کی شرح ۱۰۰ فی صد فی سال فرض کی جائے تو از روئے سوال (۲) پہلے سال کے ختم پر ادائیگی کی حاضریہ قیمت  $\frac{1}{r+1}$  ہے  
دوسرے .....  $\frac{1}{r+1}$  ہے  
.....  
.....

ن۔ ویں .....  $\frac{1}{r+1}$  ہے

پس تمام روپیہ کی حاضریہ قیمت

$$1 \left\{ \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+1} + \dots + \frac{1}{r+1} \right\} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(r+1)^n} \right\}$$

مثال۔ ۲۰ سال تک ۲۰ پونڈ سالیانہ کی حاضریہ قیمت دریافت کرو جبکہ سود کی شرح ۴ فی صد فی سال ہے۔

$$\text{یہاں } 1 = 20, n = 20, r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$\text{پس حاضریہ قیمت} = \left\{ 20 \left( \frac{25}{24} \right) - 1 \right\} \times 25 \times 20 =$$

$$20 = \left\{ 24 - 25 \right\} \times 25 \times 20 =$$

$$= \{ 124349633 - 123969200 \} \times 20 =$$

$$= 7549333 = 0.7549333 = (0.7549333 - 1) \times 25 \times 20 =$$

$$= 0.7549333 \times 25 \times 20 =$$

$$\text{پس مطلوبہ حاضریہ قیمت} = 30 \times 25 \times (1 - 0.7549333) = 0.7549333 \times 25 \times 20 =$$

سوالات نمبر (ب)

(لوکار تہی جدولیں استعمال کی جائیں)

(۱) ۵۰ سال میں ۱۰۰ پونڈ کا کل زرہ فی صد فی سال شرح سود کے حساب سے دریافت کرو۔

- ۲) ثابت کرو کہ ۱۵ سال میں ۵ فی صد فی سال شرح سود پر اور ۱۸ سال میں ۴ فی صد فی سال شرح سود پر روپیہ اپنے دو چند سے زیادہ ہو جاتا ہے۔
- ۳) ۱۰ سال تک اگر سود نصف نصف سال پر ۴ فی صد فی سال کی شرح سے جمع کیا جائے تو ۵۰۰ پونڈ کا کل زر کیا ہو گا؟
- ۴) ایک ملک میں ہر سال کے آغاز پر سالانہ ولادت کی شرح ۵ فی ہزار نفر آبادی ہے اور اموات کی شرح سالانہ ۵۲ فی ہزار نفر ہے۔ ثابت کرو کہ ۲۲ سال میں آبادی دو چند سے زیادہ ہو جائیگی۔
- ۵) ایک شخص سیونگز بنک میں جو تمام قسم کی امانتی رقموں پر ۲ ۱/۲ فی صد سالانہ منافع دیتا ہے ۳۰ پونڈ داخل کرتا ہے۔ ۲۰ برس کے بعد اس کا کل زر کیا ہو گا؟
- ۶) ۴ فی صد سالانہ کی شرح سود پر ہر سال ۱۰۰ پونڈ سالیانہ بہم سال تک حاصل کرنے کے لیے کس قدر روپیہ داخل کرنے کی ضرورت ہو گی؟
- ۷) ایک مجلس ۳۰۰۰۰ پونڈ ۳۰ مادی سالانہ قسطوں میں ادا کرنے کے وعدہ سے قرض لیتی ہے۔ اگر بازار میں منافع کی شرح ۴ فی صد سالانہ ہے تو فائدہ کرو کہ ہر سال کس قدر روپیہ ادا کیا جانا چاہیے۔

# پانچواں باب

## ڈی موآور کا مسئلہ اور اس کے استعمالات

۴۴ - ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے (جم طہ + خ جب طہ) ن کی قیمت یا اس کی قیمتوں میں سے ایک قیمت جم ن طہ + خ جب ن طہ ہے۔  
اس مسئلہ کو ڈی موآور کا مسئلہ کہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے سے پہلے ہم یہ ثابت کر بیٹے کہ

(جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ) ..... ن اجزائے ضربی  
= جم (طہ + طہ + ..... + طہ ن) + خ جب (طہ + طہ + ..... + طہ ن)  
چونکہ (جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ)  
= جم طہ جم طہ + خ (جب طہ جم طہ + جم طہ جب طہ) - جب طہ جب طہ  
= جم (طہ + طہ) + خ جب (طہ + طہ)  
یعنی دراصل ایک ن = ۲ مسئلہ مصرعہ بالا درست ہے۔

اگر ہم تین اجزائے ضربی لیں تو

(جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ)  
= {جم (طہ + طہ) + خ جب (طہ + طہ)} {جم طہ + خ جب طہ}  
= جم (طہ + طہ + طہ) + خ جب (طہ + طہ + طہ)  
پس مسئلہ بالان = ۳ کے لیے بھی درست ہے۔

اس طرح عمل پیرا ہونے سے معلوم ہو گا کہ یہ مسئلہ یہ حیثیت عمومی  
کسی بھی مثبت صحیح عدد کے لیے درست ہے۔ [ اس مسئلہ کے ذریعہ ہم

ان زاویوں کے مجموعہ کی جیوب التمام یا جیوب کو ان زاویوں کی نسبتوں کی رشتوں میں ظاہر کر سکتے ہیں - چونکہ

حجم (طہ + طہ + ..... + طہ + طہ + طہ ن)  
 = (حجم طہ + خ جب طہ) (حجم طہ + خ جب طہ) ..... (حجم طہ + خ جب طہ)  
 = حجم طہ حجم طہ ..... حجم طہ (۱ + خ مس طہ) (۱ + خ مس طہ) ..... (۱ + خ مس طہ)  
 = حجم (طہ + طہ + ..... + طہ + طہ) = حجم طہ حجم طہ ..... حجم طہ { ۱ - ح + ح - ..... }  
 اور جب (طہ + طہ + ..... + طہ + طہ) = حجم طہ حجم طہ ..... حجم طہ { ۱ - ح + ح - ..... }  
 جس میں ح = ماسوں کا حاصل جمع ہے ایک ایک ماس کو فرداً فرداً لے کر۔  
 ح = دو دو ماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔  
 ح = تین تین ماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔  
 اس سے براہ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$$\left[ \frac{\dots - {}_n C + {}_r C - {}_1 C}{\dots + {}_r C - {}_m C + {}_1 C} \right] = \text{مس} ({}^n P + \dots + {}^r P + {}^1 P)$$

۴۵۔ ڈی مٹاؤر کے مسئلہ کا ثبوت جبکہ ن (۱) ایک مثبت صحیح عدد ہے، (۲) ایک منفی صحیح عدد ہے، (۳) ایک مثبت کسر ہے اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے اور ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں، (۴) ایک منفی کسر۔ ف اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں، ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

واضح ہو کہ (۱) اور (۲) صورتوں میں (جم طہ + خ جب طہ) کی صرف ایک قیمت یعنی جم ن طہ + خ جب ن طہ ہوگی۔ (۳) اور (۴) صورتوں میں جملہ کی ق قیمتیں ہونگی جن کے مغلجہ جم ن طہ + خ جب ن طہ ایک قیمت ہوگی۔ آگے چل کر بتایا جائیگا کہ بقیہ قیمتیں کیا ہونگی۔

صورت (۱)۔ جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

سابقہ فصل میں ہم نے دیکھا ہے کہ (حجم طم + خ جب طم) (حجم طم + خ جب طم) ..... (حجم طم + خ جب طم)

$$\text{حجم (ط}_1 + \text{ط}_2 + \dots + \text{ط}_n) + \text{خجیب (ط}_1 + \text{ط}_2 + \dots + \text{ط}_n) = \text{ط}_1 = \text{ط}_2 = \dots = \text{ط}_n = \text{ط کھو۔ تب}$$

(جحم طه + خ جب طه) = جحم ن طه + خ جب ن طه

صورت (۲) — جبکہ ن ایک منفی صحیح عدد - م ہے جس میں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ (جسم م ط + خ جیب م ط) (جسم م ط - خ جیب م ط) = ا

پس حجم م طه - خ جیب م طه =  $\frac{\text{حجم م طه} + \text{خ جیب م طه}}$

$$= \frac{1}{(\text{حجم طه} + \text{خ جیب طه})}$$

$$\therefore \text{حجم} (-\text{م طه}) + \text{خ جب} (-\text{م طه}) = (\text{حجم طه} + \text{خ جب طه})$$

$$\therefore \text{حجم ن طه} + \text{خم جيب ن طه} = (\text{حجم طه} + \text{خم جيب طه})$$

صورت (۳)۔ جبکہ ن کوئی مثبت کسر  $\frac{f}{g}$  اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے اور  $f$  اور  $g$  مثبت صحیح عدد ہیں۔

چونکہ  $(\text{جم فط} + \text{خ جب فط})^2 = \text{جم فط} + \text{خ جب فط}$  صورت (۱) سے۔

(جہم فہم + خ جب فہم) جہم (جہم فہم + خ جب فہم) کی قیاسی  
اصولوں میں سے ایک اصل ہے۔

ۛ جم ف ق + خ جب ف ق جملہ (جم طہ + خ جب طہ) ف کی ق - دیں  
اصولوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۱) کی رُو سے۔

۱۰۔ جم  $\frac{ف}{ج}$  + خ جب  $\frac{ف}{خ}$  جملہ (جم ملہ + خ جب ملہ) کی قیمتوں میں سے

ایک قیمت ہے۔

صورت (۴) - جبکہ  $\frac{F}{f} =$  اور  $f$  اور  $q$  کی شکل صورت (۴)

کے ہیں۔



چونکہ  $\left\{ \text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) \right\}$  ق

=  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  صورت (۱) سے

$\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  جملہ  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$

کی ق۔ وہی اصولوں میں سے ایک اصل ہے۔

∴  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  جملہ  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$

کی ق۔ وہی اصولوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۲) سے۔

اس لیے  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  کی قیمت

$\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  ہے۔

یہ مسئلہ ن کی غیر منطقی قیمتوں کے لیے بھی صادق آتا ہے اور اس طرح سے ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے صحیح ہے، لیکن اس کا باضابطہ ثبوت اس نصاب کے لیے غیر موزوں ہوگا۔

۴۶- اب ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  کی دوسری اور قیمتیں کیا ہیں جبکہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{ق}} \pm \frac{\text{ف}}{\text{ق}} = \text{ن}$$

چونکہ  $\left\{ \text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) \right\}$  ق

=  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$

=  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  جبکہ رکوعی سا صحیح عدد ہے۔

=  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$

∴  $\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$  کی ق قیمتوں میں سے

$\text{جم} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}) + \text{خ جب} (-\frac{\text{ف}}{\text{ق}})$

ایک قیمت ہے جبکہ رکوئی سا ثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

لیکن  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  زاویے جبکہ رکو صفر '۱' ۲.... (ق-۱) قیمتیں دی جاتی ہیں 'سب مختلف ہیں اور ان میں سے کوئی سے دو ایک ہی وقت میں مساوی جیوب النہام اور مساوی جیوب نہیں رکھتے ہیں۔

$$\therefore \text{جملہ جسم} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \text{خ جب} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

ان ق صحیح عددوں کے لیے ق مختلف قیمتیں رکھتا ہے۔  
 مچھڑا رکو کسی دوسرے صحیح عدد کے مساوی لکھنے سے یہ جملہ ان ق قیمتوں میں سے ایک یا دوسری قیمت کو دہراتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ رکو کوئی نہی متصل ق صحیح عددی قیمتیں اور علی الخصوص صفر ۱.... (ق-۱) قیمتیں جسم  $\left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \text{خ جب} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$  کو جملہ (جسم ط + خ جب ط) کی ق مختلف قیمتوں کے مساوی بناتی ہیں۔ اور نیز یہ کہ (جسم ط + خ جب ط) کی ق۔ ویں اصلیں مندرجہ ذیل ہیں:-

$$\text{جسم ط} + \text{خ جب ط}$$

$$\text{جسم ط} + \frac{\pi}{2} + \text{خ جب ط} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{جسم ط} + \frac{\pi}{2} + \text{خ جب ط} + \frac{\pi}{2}$$

.....

$$\text{جسم ط} + \frac{\pi}{2} + \text{خ جب ط} + \frac{\pi}{2} + \text{خ جب ط} + \frac{\pi}{2} + \text{خ جب ط} + \frac{\pi}{2}$$

## سوالات ۵ (۱)

(۱) (۳۱ + خ) کو شکل ر (جسم ط + خ جب ط) کی شکل میں لکھو

اور اسی طرح (۳۶ + خ) کی قیمت نکالو۔

چونکہ  $(\frac{\pi}{4} \text{ حجم} + \frac{\pi}{4} \text{ خ جب})^2 = (\frac{1}{4} + \frac{3}{4})^2 = 1 + 3$

$$\therefore (x + \sqrt{3})^2 = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$r = (\pi \text{ ح.ج.ب.} + \pi \text{ ح.م.}) r =$$

(۲) ثابت کرو کہ اگر  $\text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = ۰$

اور جب ع + جب ہ + جب جہ = ۰

مثبت  $ج۲ع + ج۲ب + ج۲ج = ج۳(ع + ب + ج)$

اور جب ۳ء + جب ۲ء + جب ۱ء = ۳ جب (۱ء + ۲ء + ۳ء)

فرض کرو ۱ = حجم ع + خ جب ع' پ = حجم ب + خ جب ب' ج = حجم ج + خ جب ج'

تب ۱ + ب + ج = ۱

لیکن  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

چونکہ  $1 + 2 + 3 = 6$  اس لیے  $1^2 + 2^2 + 3^2 = 6 \times 3 = 18$

لیکن ۱ = (جم ع + خ جب ع) = جم ۲ + خ جب ۲، اسی طرح ۲ اور ج

بھی علی الترتیب = جم ۲ بہ + خ جب ۳ بہ اور جم ۳ جہ + خ جب ۳ جہ

پس ۳ ا ب ج = ۳ (جم + خ جب + جم به + خ جیا به) (جم به + خ جیا به) (جم به + خ جیا به)

$$= \{ \text{حم (ع + ه + ج)} + \text{خ جب (ع + ب + ج)} \}$$

مساوات ۱ + ب + ج = ۲ رب ج کے حقیقی اور خیالی حصص کو علی الترتیب مساوی لکھنے سے

$$ج۳ + ب۳ + ع۳ = ج۳ + ب۳ + ع۳$$

اور جب ۱ ص + جب ۲ ب + جب ۳ ج = ۳ جب (ص + ب + ج)

(۳) ثابت کرو کہ اگر  $n$  ایک مثبت صحیح عدد ہے تو

$$(1 + \text{جیب } \theta + \text{خم } \theta) = \frac{(1 + \text{جیب } \theta - \text{خم } \theta)}{(1 - \text{جیب } \theta - \text{خم } \theta)}$$

$$= \frac{(ب-ا)(د-ا)}{(ب-ج)(د-ج)} + \frac{(د-ا)(ج-ا)}{(د-ب)(ج-ب)} + \frac{(ج-ا)(ب-ا)}{(ج-د)(ب-د)} \quad (۴) \text{ تماثل}$$

میں لا = جم ۲ ط + خ جب ۲ ط اور ۱ = جم ۲ ع + خ جب ۲ ع وغیرہ لکھ کر

ثابت کرو کہ  $\frac{\text{جب } (ط-ب) \text{ جب } (ط-ج)}{\text{جب } (ع-ب) \text{ جب } (ع-ج)} = \frac{\text{جب } ۲ \text{ (ط-ع)}}{۰}$

## دُسی مؤاور کے مسئلہ کے استعمالات

۴۷۔ جب  $n$  ط  $n$  جم  $n$  ط اور  $m$   $n$  ط کا ط کی نسبتوں کی رقموں میں اظہار جبکہ  $n$  کوئی سا ثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ  $(\text{جم } n \text{ ط} + \text{ن } \text{جب } n \text{ ط}) = (\text{جم } ط + \text{ن } \text{جب } ط)$    
 آخر الذکر جملہ کو پھیلا کر متاثر کے حقیقی حصص کو ایک دوسرے کے مساوی اور اسی طرح خیالی حصص کو باہم دیگر مساوی لکھنے سے   
  $\text{جم } n \text{ ط} = \text{جم } ط - \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \text{جم } ۱ - \text{ط } ۱ \text{ جب } ۱ ط + \dots$

$\text{جب } n \text{ ط} = \text{جم } ۱ ط - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} \text{جم } ۲ - \text{ط } ۲ \text{ جب } ۲ ط + \dots$    
  $n \text{ مس } ط - \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} \text{مس } ۲ ط + \dots$

پس  $n \text{ مس } ط = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \text{مس } ۳ ط + \dots$    
  $۱ - \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \text{مس } ۱ ط + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \text{مس } ۳ ط + \dots$

## سوالات ۵ (ب)

- ثابت کرو کہ (۱)  $\text{جم } ۲ ط = \text{جم } ط - ۶ \text{جم } ۱ ط \text{ جب } ۱ ط + \text{جب } ۱ ط$    
 (۲)  $\text{جب } ۲ ط = ۴ \text{جب } ط - ۴ \text{جم } ط \text{ جب } ۱ ط$    
 (۳)  $\text{جم } ۵ ط = \text{جم } ط - ۱۰ \text{جم } ۲ ط + ۵ \text{جم } ط \text{ جب } ۱ ط$    
 (۴)  $\text{جب } ۵ ط = ۵ \text{جب } ط - ۱۰ \text{جب } ط + ۵ \text{جم } ط \text{ جب } ۱ ط$

$$(۵) \text{ جم } ۶ ط = \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۵ ط \text{ جب } ۱ ط + \text{ جم } ۱۵ ط \text{ جب } ۱ ط - \text{ جب } ۱ ط$$

$$(۶) \text{ جب } ۶ ط = \text{ جم } ۶ ط \text{ جب } ۱ ط - \text{ جم } ۲۰ ط \text{ جب } ۱ ط + \text{ جم } ۶ ط \text{ جب } ۱ ط$$

$$(۷) \text{ مس } ۲ ط = \frac{\text{ مس } ۲ ط - \text{ مس } ۱ ط}{۱ - \text{ مس } ۱ ط + \text{ مس } ۲ ط}$$

$$(۸) \text{ مس } ۵ ط = \frac{\text{ مس } ۵ ط - \text{ مس } ۱۰ ط + \text{ مس } ۱۰ ط + \text{ مس } ۵ ط}{۱ - \text{ مس } ۱۰ ط + \text{ مس } ۵ ط}$$

(۹) اگر ن کوئی ایک طاق مثبت صحیح عدد ہے تو بتاؤ کہ مندرجہ ذیل (ن-۱) متادیر

$$\text{مس } \frac{\pi}{n}, \text{ مس } \frac{\pi^2}{n}, \dots, \text{مس } \frac{\pi(n-1)}{n}$$

کے دو دو متادیر کے حامل ضربوں کا حاصل جمع  $\frac{n(n-1)}{4}$  ہے۔

$$(۱۰) \text{ ثابت کرو کہ مس } \frac{\pi}{n} + \text{مس } \frac{\pi^2}{n} + \dots + \text{مس } \frac{\pi(n-1)}{n} + \frac{\pi(n-1)}{n} =$$

= ن مم ط یا ن مس ط ہو جب اس کے کہ ن جفت عدد ہے یا طاق۔

۴۔ جب ن ط اور جم ن ط کے لیے جم ط یا جب ط کی نزولی

قوتوں کے سلسلوں میں جملے۔

سابقہ فصل کے نتائج پر غور کرنے سے واضح ہو گا کہ ن کوئی سا صحیح عدد ہو جم جم ن ط کو جم ط کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلے میں ظاہر کر سکتے ہیں اس لیے کہ جم ن ط کے لیے جو جملہ لکھا جاتا ہے اس میں جب ط کی ساری قوتیں جفت ہیں۔

$$\text{مثلاً } \text{جم } ۳ ط = \text{جم } ۱ ط - \text{جم } ۲ ط \text{ جب } ۱ ط$$

$$= \text{جم } ۱ ط - \text{جم } ۲ ط (۱ - \text{جم } ۱ ط)$$

$$= \text{جم } ۱ ط - \text{جم } ۳ ط + \text{جم } ۲ ط = \text{جم } ۲ ط - \text{جم } ۳ ط$$

[واضح ہو کہ یہ نتیجہ ابتدائی علم شناسات کا مشہور مضابطہ ہے اور بہت آسان طریقہ سے حاصل ہوتا ہے]

$$\text{جم } ۴ ط = \text{جم } ۱ ط - \text{جم } ۲ ط \text{ جب } ۱ ط + \text{جم } ۱ ط$$

$$= \text{جم } ۱ ط - ۱ - \text{جم } ۱ ط + (۱ - \text{جم } ۱ ط)$$

$$= ۸ - \text{جم } ۱ ط + ۱$$

معجزاً اگر ن طاق عدد ہے تو  $\frac{\text{جم } ۱ ط}{\text{جم } ۱ ط}$  کو جب ط کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } \frac{\text{جم } ۳ ط}{\text{جم } ۱ ط} = ۳ - \text{جم } ۱ ط + ۱$$

$$\frac{\text{جم } ۵ ط}{\text{جم } ۱ ط} = ۱۶ - \text{جم } ۱ ط + ۱$$

یہ واضح ہے کہ اگر ن طاق عدد ہے تو جب ن ط کو جب ط کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } \text{جم } ۲ ط = ۲ - \text{جم } ۱ ط + ۱$$

یہ بھی واضح ہے کہ اگر ن جفت عدد ہے تو  $\frac{\text{جم } ۱ ط}{\text{جم } ۱ ط}$  کو بھی ایسے ہی

محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } \frac{\text{جم } ۲ ط}{\text{جم } ۱ ط} = \frac{۲ - \text{جم } ۱ ط - ۱ - \text{جم } ۱ ط}{\text{جم } ۱ ط}$$

$$= ۲ - \text{جم } ۱ ط - ۱ - \text{جم } ۱ ط$$

$$= ۲ - \text{جم } ۱ ط - ۱ - \text{جم } ۱ ط$$

$$= ۸ - \text{جم } ۱ ط + ۱$$

جم ن ط اور جب ن ط کو محض جم ط یا جب ط کی قوتوں کے سلسلوں میں عام طور پر پھیلا سکتے ہیں۔ لیکن ان کا باضابطہ ثبوت چونکہ اس نصاب سے بالاتر ہے اس لیے ہم صرف چند آسان مثالوں ہی پر اکتفا کرتے ہیں۔

### سوالات ۵ (ج)

ثابت کرو۔ (۱) جم ۷ ط = ۶۲ - جم ۱ ط + ۱۱۲ - جم ۱ ط + ۵۶ - جم ۱ ط



جم  $\frac{\pi}{n}$  ، جم  $\frac{\pi^2}{n}$  ، ..... جم  $\frac{\pi(1-n)}{n} + \frac{\pi}{n}$  ..... (۳)  
 سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور اس لیے وہ مساوات (۲) کی جو بلحاظ جم  $\frac{\pi}{n}$   
 ایک مساوات ہے 'ن' اصلیں ہیں۔  
 یہیں حالت اس مساوات کے ذریعہ جم  $\frac{\pi}{n}$  ، جم  $\frac{\pi^2}{n}$  ، .....  
 جم  $\frac{\pi(1+n)}{n} + \frac{\pi}{n}$  کے متشاکل تفاعل دریافت ہو سکتے ہیں۔

اس کے علی الرغم اگر صفر یا  $\pi$  کی صنف ہے اور  $n < 2$  تو مساوات (۲)  
 کی اصلیں سب مختلف نہیں ہیں بلکہ دہرائی جاتی ہیں۔  
 ۴۹۔ اگر ہم جم  $\frac{\pi}{n}$  کو جب  $\frac{\pi}{n}$  کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں ادا کریں  
 جبکہ  $n$  جفت (بالفرض  $m^2$ ) ہے تو ہمیں ایک ایسی مساوات ملتی ہے جس کی  
 اصلیں مندرجہ ذیل  $m^2$  جیسی ہیں :-

$$\text{جب } \frac{\pi}{m^2} \text{ ، جب } \left( \frac{\pi}{m^2} + \frac{\pi}{m^2} \right) \text{ ، جب } \left( \frac{\pi}{m^2} + \frac{\pi}{m^2} \right) \text{ ، ..... جب } \left( \frac{\pi(1-m^2)}{m^2} + \frac{\pi}{m^2} \right)$$

اسی طرح جب  $\frac{\pi}{m^2}$  کو جب  $\frac{\pi}{m^2}$  کی نزولی قوتوں میں پھیلانے سے سجا لیں  
 $n$  طاق (بالفرض  $m^2 + 1$ ) ہے ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی  
 اصلیں مندرجہ ذیل  $m^2 + 1$  جیسی ہیں :-

$$\text{جب } \frac{\pi}{1+m^2} \text{ ، جب } \left( \frac{\pi}{1+m^2} + \frac{\pi}{1+m^2} \right) \text{ ، ..... جب } \left( \frac{\pi m^2}{1+m^2} + \frac{\pi}{1+m^2} \right)$$

جم  $\frac{\pi}{n}$  ، جم  $\frac{\pi^2}{n}$  ، ..... جم  $\frac{\pi(1-n)}{n} + \frac{\pi}{n}$  .....  
 استعمال کیے جاسکتے ہیں جیسا کہ ذیل کے آخری چند سوالوں سے ظاہر ہوگا۔

### سوالات ۵ (۵)

(۱) ثابت کرو کہ جم  $\frac{\pi}{n}$  ، جم  $\frac{\pi^2}{n}$  ، جم  $\frac{\pi^3}{n}$  ، ..... جم  $\frac{\pi(1-n)}{n} + \frac{\pi}{n}$  ..... مساوات  
 $n^2 + 2n - 1 = 0$  کی اصلیں ہیں۔



$$\text{چونکہ } ۷ ط = ۶ ط + ۱ ط - ۱۱ ط + ۵ ط - ۷ ط = ۷ ط$$

$$\text{جم } ۷ ط = ۱ اور جم ط = لا لکھنے سے$$

$$\text{مساوات } ۶ ط - لا - ۱۱ ط + ۵ ط - لا - ۱ = ۰$$

$$\text{کی اصلیں '۱' جم } \frac{\pi^2}{2}, \text{ 'جم } \frac{\pi^2}{2}, \dots \text{ جم } \frac{\pi^{12}}{2} \text{ ہیں۔}$$

$$\text{مجہذا 'جم } \frac{\pi^2}{2} = \text{جم } \frac{\pi^{12}}{2} = \text{جم } \frac{\pi^4}{2} = \text{جم } \frac{\pi^{10}}{2} \text{ اور جم } \frac{\pi^6}{2} = \text{جم } \frac{\pi^8}{2}$$

$$\text{لیکن } ۶ ط - لا - ۱۱ ط + ۵ ط - لا - ۱ = (۱ - لا) (۱ - لا + لا - لا + لا - لا + ۱) = ۰$$

$$\text{پس مساوات } ۸ ط - لا + لا - لا - ۱ = ۰ \text{ کی اصلیں}$$

$$\text{جم } \frac{\pi^2}{2}, \text{ 'جم } \frac{\pi^4}{2} \text{ اور جم } \frac{\pi^6}{2} \text{ ہیں}$$

$$(۲) \text{ ثابت کرو کہ } ۱۶ \text{ جم } ۷ ط + ۲ جم ۳ ط = ۴ جم ۴ ط = ۱ جس میں } \frac{\pi^8}{2}$$

$$(۳) \text{ ثابت کرو کہ } ۸ \text{ جب } \frac{\pi}{2} \text{ جب } \frac{\pi^2}{2} \text{ جب } \frac{\pi^3}{2} = ۷$$

$$\text{چونکہ } ۷ ط = ۶ ط + ۱ ط - ۱۱ ط + ۵ ط - ۷ ط = ۷ ط$$

$$\text{جب } ۷ ط = ۰ \text{ لکھنے سے مساوات } ۶ ط - لا - ۱۱ ط + ۵ ط - لا - ۱ = ۰$$

$$\text{کی اصلیں '۰' جب } \frac{\pi}{2}, \text{ 'جب } \frac{\pi^2}{2}, \text{ 'جب } \frac{\pi^3}{2} \text{ ہوتی ہیں۔}$$

$$\text{پس } \text{جب } \frac{\pi}{2}, \text{ جب } \frac{\pi^2}{2}, \text{ جب } \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi^4}{2}$$

$$\text{اور } ۸ \text{ جب } \frac{\pi}{2}, \text{ جب } \frac{\pi^2}{2}, \text{ جب } \frac{\pi^3}{2} = ۷$$

اس میں نسبت علامت لی گئی ہے اس لیے کہ حاصل ضرب مثبت ہے۔

$$(۴) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{\pi}{2} \text{ مس } \frac{\pi^2}{2} \text{ مس } \frac{\pi^3}{2} \text{ مس } \frac{\pi^4}{2} \text{ مس } \frac{\pi^5}{2} = \frac{\pi^6}{2}$$

$$\text{چونکہ } \frac{\pi}{2} \text{ مس } ۱ ط = \frac{۱ \times ۱ \times ۱}{۲ \times ۲ \times ۲} \text{ مس } ۲ ط + \dots \text{ مس } ۱ ط$$

$$- ۱ - \frac{۱ \times ۱}{۲ \times ۲} \text{ مس } ۱ ط + \dots \text{ مس } ۱ ط$$

اگر مس ۱۱ ط = . لکھیں تو مساوات ۱۱ مس ط -  $\frac{9 \times 10 \times 11}{3 \times 2 \times 1}$  مس ط + ... مس ۱۱ ط = .  
 کی اصلیں .  $\pm$  مس ۱۱ ط  $\pm$  مس ۱۲ ط  $\pm$  مس ۱۳ ط  $\pm$  مس ۱۴ ط  $\pm$  مس ۱۵ ط ہوتی ہیں۔  

$$\therefore \text{مس } 11 \text{ ط} \dots \text{مس } 12 \text{ ط} \dots \text{مس } 15 \text{ ط} = 11$$

پس مس ۱۱ ط مس ۱۲ ط مس ۱۳ ط مس ۱۴ ط مس ۱۵ ط = ۱۱  
 (۵) ثابت کرو کہ ۲ جم  $\frac{11}{2}$  مساوات لا - لا - لا ۲ = ۱ + لا ۲ = ۰ کی ایک اصل ہے اور بقیہ اصلیں کیا ہیں بتاؤ۔  
 (۶) ثابت کرو کہ لا = ۲ جم  $\frac{11}{2}$  مساوات لا - لا ۶ + لا ۹ = ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔ بقیہ اصلیں بتائی جائیں۔

[ہدایت - جب ۹ ط کو جیب التمام کے سلسلہ میں پھیلادو اور  
 پھر جب ۹ ط = ۰]

(۷) ثابت کرو کہ مساوات لا - لا ۲۱ + لا ۲۵ - لا ۷ = ۰ کی اصلیں  
 مس ۱ ط مس ۱۲ ط اور مس ۱۳ ط ہیں اور اس کی مدد سے بتاؤ کہ  

$$۲۱۶ = \frac{11}{2} \text{ قط} + \frac{11}{2} \text{ قط} + \frac{11}{2} \text{ قط}$$

۵۰۔ جم ط کا اظہار ط کے ضعفوں کی جیب التمام کے  
 سلسلہ میں جبکہ ط ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

اگر ہم لکھیں جم ط + خ جب ط = لا

تو جم ط - خ جب ط = لا

اور جم ن ط + خ جب ن ط = لا ، جم ن ط - خ جب ن ط = لا

پس ۲ جم ط = لا + لا اور ۲ خ جب ط = لا - لا  
 ۲ جم ن ط = لا + لا اور ۲ خ جب ن ط = لا - لا





پس  $\text{جم } n \text{ ط} = {}^{n-2}_{n-1} (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n}{2}) (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n^2}{2}) \dots (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n(n-1)}{2})$   
 ہم ان کو از سر نو جوڑاں ترتیب دے کر لکھ سکتے ہیں، جبکہ  $n$  ایک طاق عدد ہے،

$$\text{جم } n \text{ ط} = {}^{n-1}_{n-1} (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n}{2}) (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n^2}{2}) \dots (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n(n-1)}{2})$$

اور اگر  $n$  ایک جفت عدد ہے تو

$$\text{جم } n \text{ ط} = {}^{n-2}_{n-1} (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n}{2}) (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n^2}{2}) \dots (\text{جم } \text{ط} - \text{جم } \frac{n(n-1)}{2})$$

یہ جملے اس طرح بھی لکھے جاسکتے ہیں:

$$\text{جم } n \text{ ط} = \frac{n}{2} (\text{جب } \frac{n}{2} - \text{جم } \frac{n}{2}) (\text{جب } \frac{n}{2} - \text{جم } \frac{n^2}{2}) \dots (\text{جب } \frac{n}{2} - \text{جم } \frac{n(n-1)}{2})$$

جبکہ  $n$  طاق عدد ہے۔

$$\text{اور جم } n \text{ ط} = {}^{n-1}_{n-1} (\text{جب } \frac{n}{2} - \text{جم } \frac{n}{2}) (\text{جب } \frac{n}{2} - \text{جم } \frac{n^2}{2}) \dots (\text{جب } \frac{n}{2} - \text{جم } \frac{n(n-1)}{2})$$

جبکہ  $n$  جفت ہے

اگر  $n$  ← ۰ تو

$$1 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ جب } \frac{n}{2} \text{ جب } \frac{n^2}{2} \dots \text{جب } \frac{n(n-1)}{2}$$

جبکہ  $n$  طاق عدد ہے۔

$$\text{اور } \frac{n(n-1)}{2} \text{ جب } \frac{n}{2} \text{ جب } \frac{n^2}{2} \dots \text{جب } \frac{n(n-1)}{2} = 1$$

جبکہ  $n$  جفت عدد ہے۔



جبکہ  $n$  جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } ط} = \frac{1}{2} \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } ط \right) \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } ط \right) \dots \dots \dots \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } ط \right) \left( \text{جب } ط \right)$$

جبکہ  $n$  طاق عدد ہے۔

$$\text{لیکن } \frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } ط} = n \left( \frac{\text{جب } n \text{ ط}}{n \text{ ط}} \right) \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right)$$

$$\therefore \text{نہا } \left( \frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } ط} \right) = n \text{ نہا } \left( \frac{\text{جب } n \text{ ط}}{n \text{ ط}} \right) \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right) = n$$

اگر مندرجہ بالا نتیجوں میں  $ط \leftarrow 1$  تو

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2} \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } 1 \right) \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } 1 \right) \dots \dots \dots \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } 1 \right) \left( \text{جب } 1 \right)$$

جبکہ  $n$  جفت عدد ہے، اور

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2} \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } 1 \right) \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } 1 \right) \dots \dots \dots \left( \text{جب } \frac{n}{2} - \text{جب } 1 \right) \left( \text{جب } 1 \right)$$

جبکہ  $n$  طاق عدد ہے۔

جذر المربع کی علامت مثبت لی جاتی ہے اس لیے کہ تمام جیسے مثبت ہیں۔

$$\text{پس } \frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } ط} = \text{جم } ط \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right) \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right) \dots \dots \dots \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right) \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right)$$

جبکہ  $n$  جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } ط} = \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right) \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right) \dots \dots \dots \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right) \left( \frac{\text{جب } ط}{\text{جب } ط} \right)$$

جبکہ  $n$  طاق عدد ہے۔

۵۳۔ اکائی کی  $n$  اصولوں کی تعیین جبکہ  $n$  کوئی مثبت

صحیح عدد ہے۔ بالفاظ دیگر مساوات  $1 = 1$  کا حل۔

چونکہ حجم  $\pi^2$  + خ جب  $\pi^2 = 1$  پس فصل (۲۵) کی رو سے  
لہذا  $\pi^2 = \text{حجم } \pi^2 + \text{خ جب } \pi^2$

$$\text{لا} = \text{حجم } \frac{\pi^2(1+r)^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2(1+r)^2}{n} \text{ جس میں } r = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\therefore \text{لا} = \text{حجم } \frac{\pi^2 r^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2 r^2}{n} \text{ جس میں } r = 1, 2, \dots, n$$

بحالیکہ  $n$  ایک جفت مثبت صحیح عدد ۲ ف ہے تو

$$\text{لا} = \text{حجم } \frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n} \text{ جس میں } r = 1, 2, \dots, 2, n-1$$

$$\text{ر کی قیمت} = \text{ف} \text{ تو لا} = 1 - 1 \text{ اور ر کی قیمت} = 2 \text{ ف} \text{ تو لا} = 1 + 1$$

$$\text{ر کی قیمت} = \text{س} \text{ تو لا} = \text{حجم } \frac{\pi^2}{n} + \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n}$$

$$\text{اور ر کی قیمت} = 2 \text{ ف} - \text{س} \text{ تو لا} = \text{حجم } \frac{\pi^2}{n} - \text{خ جب } \frac{\pi^2}{n}$$

س کی قیمتیں اب ۱، ۲، .....، ف-۱ ہوں گی۔

$$\text{بحالیکہ } n \text{ ایک طاق مثبت صحیح عدد } 2 \text{ ف} + 1 \text{ ہے تو}$$

$$\text{لا} = \text{حجم } \frac{\pi^2 r^2}{1+n^2} + \text{خ جب } \frac{\pi^2 r^2}{1+n^2} \text{ جس میں } r = 1, 2, \dots, 2, n+1$$

$$\text{ر کی قیمت} = 2 \text{ ف} + 1 \text{ تو لا} = 1$$

لا کی بقیہ قیمتیں جوڑواں ترتیب دی جاسکتی ہیں اور  $r = 1, 2, \dots, n$  کے لیے

$$\text{لا} = \text{حجم } \frac{\pi^2 r^2}{1+n^2} \pm \text{خ جب } \frac{\pi^2 r^2}{1+n^2} \text{ دیتی ہیں۔}$$

اس سے بطور نتیجہ صریح مستخرج ہوتا ہے کہ لا<sup>۲</sup> - ۱ کے اجزائے ضربی

$$(لا-۱)(لا-۲) \dots (لا-۲) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + (لا-۱)(لا-۲) \dots (لا-۲) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + \dots + (لا-۲) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + (لا-۱) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + 1$$

اور لا<sup>۲</sup> - ۱ کے اجزائے ضربی

$$(لا-۱)(لا-۲) \dots (لا-۲) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + (لا-۱)(لا-۲) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + \dots + (لا-۲) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + (لا-۱) \text{ لاجم } \frac{\pi^2}{n^2} + 1$$





ہیں۔  

$$(لا + ز) (لا - ز) = ۲ - لا جم ۱ + ز جم ۱ + ز جم ۲ + لا جم ۲ + لا جم ۳ + ز جم ۳ + لا جم ۴ + ز جم ۴ + لا جم ۵ + ز جم ۵ + لا جم ۶ + ز جم ۶ + لا جم ۷ + ز جم ۷ + لا جم ۸ + ز جم ۸ + لا جم ۹ + ز جم ۹ + لا جم ۱۰ + ز جم ۱۰$$

### سوالات ۵ (و)

(۱) مساوات لا<sup>۲</sup> + ز<sup>۲</sup> = کو حل کرو۔

چونکہ  $(\frac{لا}{ز})^۲ = ۱ - جم جم$  جب ۱

$$\therefore \frac{لا}{ز} = جم جم \quad (۱ = جم جم)$$

$$\frac{لا}{ز} = جم جم \pm جم جم \pm جم جم$$

(۲) مساوات لا<sup>۲</sup> + ز<sup>۲</sup> = کو حل کرو۔

چونکہ  $(\frac{لا}{ز})^۲ = ۱ - جم جم$  جب ۱

$$\therefore \frac{لا}{ز} = جم جم \pm جم جم \pm جم جم$$

$$\therefore \frac{لا}{ز} = جم جم \pm جم جم \pm جم جم$$

$$جم جم \pm جم جم \pm جم جم = ۱$$

$$۱ = ۱ - جم جم$$

(۳) مساوات لا<sup>۲</sup> + ز<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + ز<sup>۲</sup> = کو حل کرو۔

$$۵۵ - لا^۲ - ز^۲ = لا جم جم + ز جم جم = کو حل جبکہ ن کوئی سا$$

ثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ لا<sup>۲</sup> - ز<sup>۲</sup> = لا جم جم + ز جم جم =

$$\therefore (لا - ز) (لا + ز) = لا جم جم + ز جم جم$$

$$\therefore لا - ز = لا جم جم + ز جم جم$$

$$\therefore لا = ز (جم جم \pm جم جم)$$

پس لاکھ ۲ قیمتیں . لا = (جم  $\frac{ن+ع+۲}{ن} \pm$  خم جب  $\frac{ن+ع+۲}{ن}$ ) ہیں

جس میں  $ر = ۰, ۱, ۲, \dots, ن-۱$  .  
ان کو جوڑواں ترتیب دے سکتے ہیں اور اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

لا<sup>۲</sup> - ۲ لا (جم  $\frac{ن+ع+۲}{ن}$  + لا<sup>۱</sup> کے دو درجی اجزائے ضربی،

$$\{ لا^۲ - ۲ لا (جم \frac{ن+ع+۲}{ن} + لا^۱) \} \dots \{ لا^۲ - ۲ لا (جم \frac{ن+ع+۲}{ن} + لا^۱) \} \dots$$

اس لیے کہ یہ اجزائے ضربی = (لا - (جم  $\frac{ن+ع+۲}{ن}$  - خم جب  $\frac{ن+ع+۲}{ن}$ )  $\times$

(لا - (جم  $\frac{ن+ع+۲}{ن}$  + خم جب  $\frac{ن+ع+۲}{ن}$ ) جس میں  $ر = ۰, ۱, ۲, \dots, ن-۱$  .

اس ضابطہ سے بعض اہم نتائج حاصل کیے جاسکتے ہیں - چنانچہ  
(لا = لا<sup>۱</sup> لکھو اور) عد کے بجائے ط لکھیں تب

$$\{ (۱-جم \frac{ن+ع+۲}{ن})^۲ - ۲ (۱-جم \frac{ن+ع+۲}{ن}) (۱-جم \frac{ن+ع+۲}{ن}) \} \dots \{ (۱-جم \frac{ن+ع+۲}{ن})^۲ - ۲ (۱-جم \frac{ن+ع+۲}{ن}) (۱-جم \frac{ن+ع+۲}{ن}) \}$$

اگر ہم یہاں بجائے ط کے ۲ ط لکھیں تو

$$جب \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۰ \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۱ \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۲ \dots \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = (ن-۱)$$

$$یا جب \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۰ \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۱ \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۲ \dots \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = (ن-۱)$$

جس کی مبہم علامت کا ہنوز تصفیہ ہونا ہے -  
لیکن اگر ہم جب ط پر تقسیم کریں اور پھر ط ← ہونے دیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ن = ۰ \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۰ \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۱ \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = ۲ \dots \text{ جب } \frac{ن+ع+۲}{ن} = (ن-۱)$$

اجزائے ضربی جب  $\frac{\pi}{n}$ ، جب  $\frac{\pi^2}{n}$ ، ..... جب  $\frac{\pi(1-n)}{n}$  سب کے سب مثبت ہیں، پس یہاں مثبت علامت لی جائیگی۔

لہذا جب  $n$  طہ =  $1^3$  جب طہ جب  $(\frac{\pi}{n} + طہ)$  ..... جب  $(\frac{\pi(1-n)}{n} + طہ)$   
اب اگر بجائے طہ کے  $(\frac{\pi}{n} + طہ)$  لکھا جائے تو

جمن طہ =  $1^3$  جب  $(\frac{\pi}{n} + طہ)$  جب  $(\frac{\pi^2}{n^2} + طہ)$  ..... جب  $(\frac{\pi(1-n^2)}{n^2} + طہ)$

(ب) لا = ۱ (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

تب چونکہ  $1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔

$1^3 - 2^3 = 1 - 8 = -7$  (جمن طہ + خ جب طہ) لکھو۔





(ف ع) (ف ع) ..... (ف ع) = لا ن  
پس پہلے کو دوسرے پر تقسیم کرنے سے (ف ا) (ف ا) ..... (ف ا) = لا ن + ن  
واضح ہو کہ یہ رابطے کو نیز کے خواص دائرہ (Cotes' properties of the circle) کہلاتے ہیں۔

## سوالات ۵ (ن)

(۱) ثابت کرو کہ قط' ط + قط' (ط + ن) + ..... + قط' (ن - ۱) = ن قط' ن ط  
یا ن قم' ن ط بلحاظ اس کے کہ ن طاق مدہ ہے یا جفت -

(۲) اگر لا = جم + خ جب ع  
ما = جم + خ جب ب  
ی = جم + خ جب ج ، تو

$$(ما + ی) (ی + لا) (لا + ما) = ۸ لا ما ی جم - جم - جم - جم - جم - جم - جم - جم$$

(۳) اگر جب ل + جب ب + جب ج = ۰  
جم ل + جم ب + جم ج = ۰ تو  
۳ (ل - ب) ، ۳ (ب - ج) ، ۳ (ج - ل) کے ضرب میں -  
اور جم ل + جم ب + جم ج = ۰

(۴) اگر جم ع + جم ب + جم ج + جم ج = ۰ ، تو  
جب ع + جب ب + جب ج + جب ج = ۰

ان دیے ہوئے چار زاویوں میں سے دو ایک دوسرے سے بقدر ایک طاق ضعف ۳۳  
مختلف ہونگے اور بقیہ دو بھی ایک دوسرے سے بقدر ایک طاق ضعف ۳۳ مختلف  
ہونگے۔

(۵) لا - ۱ کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

$$[نباؤ کہ ۲ جم ۱۱ + ۲ جم ۱۱ - ۲ جم ۱۱ + ۲ جم ۱۱ - ۲ جم ۱۱ + ۲ جم ۱۱ - ۲ جم ۱۱ + ۲ جم ۱۱]$$

مساوات  $لا^۳ + لا^۲ - لا + ۱ = ۰$  کی اصلیں ہیں ]

(۶) اگر  $ر = جم + فہ$  + خ جب  $فہ$  جس میں  $فہ = \frac{\pi^2}{4}$  تو بتاؤ کہ  $ر + ر' + ر'' + ر'''$  ایک کعبی حقیقی صحیح عددی سروں والی مساوات کی اصلیں ہیں۔

(۷)  $لا^۳ - لا^۲ - ۲ لا + جم + ط$  کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو جبکہ  $ن$  ایک مثبت صحیح عدد ہے اور بتاؤ کہ

$$جم - \frac{\pi^2}{4} - جم(ن + فہ + \frac{\pi^2}{4}) =$$

$$۲۵۲ جب فہ جب (فہ + \frac{\pi^2}{4}) جب (فہ + \frac{\pi^2}{4}) ..... جب (فہ + \frac{\pi^2}{4}) (ن-۱)^۲ + \frac{\pi^2}{4}$$

$$(۸) ثابت کرو کہ \frac{1-\pi}{2} (جم - فہ - جم \frac{\pi^2}{4}) + \frac{1-\pi}{2} \{ ۱ - جم(فہ + \frac{\pi^2}{4}) \} =$$

$$(۹) ثابت کرو کہ جم(ن + ط) + جب(ن + ط) = ۲ - \frac{1-\pi}{2} جب(ن + ط) + \frac{\pi^2}{4}$$



## چھٹا باب

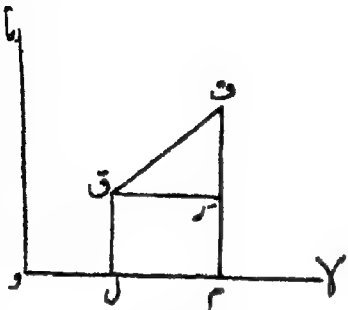
### قائم اور قطبی محدود۔ اُن کا استحالہ اور خطِ مستقیم کی مساواتیں

۵۷۔ (۱) محدودوں کی تعریف۔ اگر دلا اور دما دو باہمی  
 علی التوأم محوروں تو اُن کے مستوی میں کسی نقطہ پ کے موقع یا محل کی  
 تعیین ان محوروں سے اُن کے فاصلوں کے ذریعہ سے ہو سکتی ہے۔ یہ فاصلے  
 اس نقطہ کے کارٹیزی محدد (Cartesian co-ordinates) کہلاتے ہیں  
 اور لا، ما سے تعبیر کیے جاتے ہیں۔ ان محوروں کے تقاطع کا نقطہ و مبدأ  
 کہلاتا ہے۔ اگر حوالہ کا صرف ایک محور دلا قرار دیا جائے تو نقطہ ف کی  
 تعریف اس کے فاصلہ و ف اور زاویہ کلا و ف کے ذریعہ سے ہو سکتی  
 ہے۔ یہ و ف کے قطبی محدد کہلاتے ہیں اور (س، ط) سے تعبیر کیے جاتے  
 ہیں۔ س کو نیم قطر سمتی کہتے ہیں اور ط کو سمتی زاویہ۔  
 کارٹیزی اور قطبی محدودوں کے مابین مندرجہ ذیل روابط واضح ہیں:-

$$\text{لا} = \text{س} \cos \text{ط} \quad \text{ما} = \text{س} \sin \text{ط} \quad \text{س}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 \quad \text{مس} \text{ط} = \frac{\text{لا} \times \text{ما}}{\text{س}}$$

ابتداءً کارٹیزی محدودوں سے بحث کی جائیگی۔ اس کے بعد قطبی محدودوں سے۔  
 کارٹیزی محدودوں کا علی التوأم ہونا لازمی نہیں۔ یہ کسی بھی زاویہ پر مائل ہو سکتے  
 ہیں۔ لیکن عموماً سہولت زاویہ قائمہ ہی کی صورت میں پائی جاتی ہے۔  
 اس نصاب میں محوروں کا زاویہ میلان قائمہ ہی مقصور ہوگا۔

(ب) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محدودوں کی رقموں میں۔



شکل ۱

شکل ۱ میں فرض کرو نقطہ ف کے محدود 'لا'، 'ما' ہیں اور نقطہ ق کے محدود 'لا'، 'ما'، 'ف' م اور ق ل محدود 'ما' کے متوازی کھینچو اور ق ر محدود 'لا' کے متوازی۔  
تب ول = لا، ل ق = ما،

وم = لا، م ف = ما

$$ف ق = ق ر + ر ف$$

لیکن ق ر = ل م = دم - ول = لا - لا

اور ر ف = م ف - م ر = م ف - ل ق = ما - ما

$$\therefore ف ق = (لا - لا) + (ما - ما)$$

$$پس ف ق = \pm \sqrt{(لا - لا)^2 + (ما - ما)^2}$$

نقطہ ف کا فاصلہ مبدا و سے یا تو براہ راست دریافت کر لیا جاسکتا ہے یا مندرجہ بالا ضابطہ میں لا = ۰ اور ما = ۰ لکھنے سے۔ چنانچہ

$$و ف = \pm \sqrt{لا^2 + ما^2}$$

خطوط مستقیم جب محور ولا یا و ما کی سمت میں ناپے جاتے ہیں تو وہ مثبت تصور کیے جاتے ہیں اور ان کی مخالف سمتوں میں منفی۔ ان سمتوں کے متوازی سمتوں کے متعلق بھی یہی قرار داد مسلم ہے۔ دیگر اسات کے متعلق ایسی کوئی قرار داد نہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خط مستقیم پر تین یا زیادہ نقطے 'ق'، 'ر'، ..... ہوں تو ہمیں چاہیے کہ اس خط پر جہ نقطوں کے لیے ایک ہی سمت کو مثبت تصور کریں اور اس کی مخالف سمت کو منفی تاکہ جملہ صورتوں میں  $ف ق + ق ر = ف ر$  ہو۔

(ج) دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو معینہ نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محدودوں کی تعیین۔



اوک، بل اور ج م خطوط محور ما کے متوازی کھینچو۔

$$\Delta \text{ ا ب ج } = \text{م ج اوک} - \text{ک او بل} - \text{ل ب ج م}$$

$$\text{لیکن م ج اوک} = \Delta \text{ م ج او} + \Delta \text{ اوک م} = \frac{1}{2} \text{م ج او} + \frac{1}{2} \text{م ج او} = \text{م ج او}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{لام} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لام})$$

$$\text{اسی طرح ک او بل} = \frac{1}{2} (\text{لام} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لام})$$

$$\text{اور ل ب ج م} = \frac{1}{2} (\text{لام} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لام})$$

$$\therefore \Delta \text{ ا ب ج} = \frac{1}{2} \{ (\text{لام} + \text{لا}) (\text{لام} - \text{لا}) + (\text{لام} + \text{لا}) (\text{لام} - \text{لا}) + (\text{لام} + \text{لا}) (\text{لام} - \text{لا}) \}$$

اس جگہ کو پھیلا کر اس میں سے جو رقبے کٹ جاتی ہیں ان کو بحال دینے سے

$$\Delta \text{ ا ب ج} = \frac{1}{2} (\text{لا} + \text{لام} - \text{لا} + \text{لام} + \text{لام} - \text{لام} + \text{لا} + \text{لام} - \text{لا} + \text{لام})$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \text{لا} & \text{لام} & \text{لا} \\ \text{لام} & \text{لام} & \text{لام} \\ \text{لام} & \text{لام} & \text{لام} \end{array} \right| \frac{1}{2} =$$

مثلث کے رقبہ کے لیے مندرجہ بالا جملہ مثبت پایا جائیگا اگر دور اوک کے انحصار کی ترتیب مخالف سمت ساعت ہوگی یعنی مثلث کے گرد گھومنے کے لیے مخالف سمت ساعت حرکت کرنی ہوگی۔ اگر حسابی عمل سے رقبہ کی قیمت منفی برآید ہو تو سمجھنا چاہیے کہ مثلث کے گرد گھومنے کے لیے موافق سمت ساعت ترتیب اختیار کی گئی ہے۔

(ھ) ایک ذوارقبہ الاصلیہ

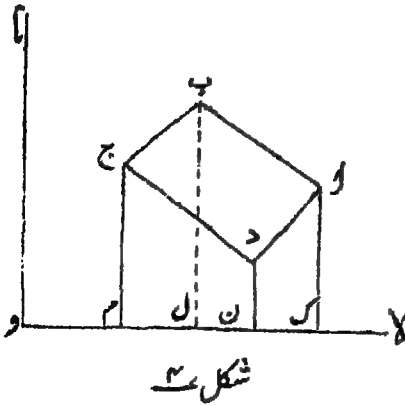
کا رقبہ اس کے زاویہی نقطوں کی

رقبوں میں (بجائے ایک متبرہ ترتیب کے)۔

شکل ۷ میں فرض کرو کہ او، ب، ج، د

زاویہی نقطوں کے متحد علی ترتیب

(لا، لام)، (لام، م)، (لام، م) اور (لام، م) ہیں۔



لوک، بل، ج، م اور د ن محمد ما کے متوازی کھینچو۔

تب رقبہ لب ج د = ک لب ل + ل ب ج م - م ج د ن - ن د لوک

رقبہ ک لب ل =  $\frac{1}{2} (۱۶ + ۱۶) (۱۶ - ۱۶)$  رقبہ ل ب ج م =  $\frac{1}{2} (۲۶ + ۲۶) (۲۶ - ۲۶)$

م ج د ن =  $\frac{1}{2} (۲۶ + ۲۶) (۲۶ - ۲۶)$  ن د لوک =  $\frac{1}{2} (۱۶ + ۱۶) (۱۶ - ۱۶)$

پس رقبہ لب ج د =  $\frac{1}{2} \{ (۱۶ + ۱۶) (۱۶ - ۱۶) + (۲۶ + ۲۶) (۲۶ - ۲۶) \}$

=  $\frac{1}{2} \{ (۱۶ + ۲۶) (۲۶ - ۱۶) + (۲۶ + ۱۶) (۱۶ - ۲۶) \}$

کٹ جانے والی رقبوں کو چھوڑ دینے سے رقبہ لب ج د

=  $\frac{1}{2} \{ (۱۶ + ۲۶) (۲۶ - ۱۶) + (۲۶ + ۱۶) (۱۶ - ۲۶) \}$

اس کے مثال طریقہ سے کسی بھی کثیر الاضلاع کا رقبہ دریافت کیا جاسکتا ہے۔

جس تدویری ترتیب میں مندرجہ بالا ضابطہ لکھا گیا ہے، اگر زاویہ نقطے

شکل کے محیط کے گرد مخالف سمت ساعت ترتیب میں لیے جائیں تو مثبت ہوتا

ہے اور اگر موافق سمت ساعت ترتیب میں لیے جائیں تو منفی۔

اگر ہم کسی منحنی کی ایک ایسی ہندسی خاصیت کے ذریعہ تعریف کریں جو اس کے تمام

نقطوں کے لیے مشترک ہو تو ایسا جبری رابطہ دریافت ہو سکتا ہے جو صرف اسی منحنی

کے جملہ نقطوں کے محددوں کے لیے صحیح ہو اور کسی اور کے لیے صحیح نہ ہو۔ اس رابطہ

کو منحنی کی مساوات کہتے ہیں۔

ہندسہ تحلیلی میں کسی ہندسی خاصیت کے لحاظ سے منحنی کی تعریف کر کے

اُس کی مساوات دریافت کی جاتی ہے اور اگر ایسی کوئی مساوات دی گئی ہو تو

اُس کے متعلقہ منحنی کی وضع اور اس کے خواص دریافت کیے جاتے ہیں۔

اگر کسی مساوات کو اس طرح تحلیل کریں کہ اس کے متغیروں کے قوت نما

مکملہ چھوٹے سے چھوٹے مثبت صحیح عدد ہوں تو اُس کے سب سے بڑے ابعاد کی رقم

یا رقبوں کے لحاظ سے اس کا درجہ شمار ہوگا۔ مثلاً  $۱۶ا + ۲۶ب + ۱۶ج = ۰$  پہلے درجہ کی

مساوات ہے

$۱۶ا + ۲۶ب = ۰$ ،  $۱۶ا + ۲۶ب + ۱۶ج = ۰$  اور  $۱۶ا + ۲۶ب + ۱۶ج + ۱ = ۰$  (جو مناطق

بننے پر  $۱۶ا + ۲۶ب + ۱۶ج + ۱ = ۰$  میں تبدیل ہوتی ہے) تینوں دوسرے

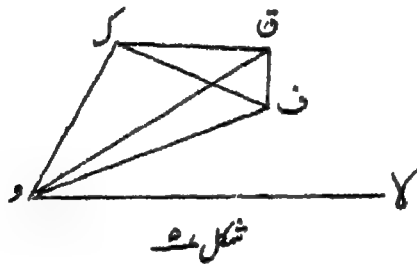
درجہ کی مساواتیں ہیں۔

۵۸۔ قطبی محدوں کا استعمال۔ کسی نقطہ کا سمتی زاویہ طہ اگر محور

و کاسے مخالف سمت ساعت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت تصور کیا جاتا ہے نیم قطر سمتی ہا اگر مبداء و سے سمتی زاویہ کے حاطط خط کی سمت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت مانا جاتا ہے اور اگر اس کے مخالف سمت میں ناپا جاتا ہے تو منفی۔

(۱) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ نقطوں کے قطبی محدوں کی رقموں میں۔

اگر ف' ق دو نقطوں کے محد و سہا، طہ اور سہا، طہ ہوں تو علم المثلثات سے

$$ف' ق = وف' + وق' - ۲ وف' سم' سم' جم' ف' وق'$$


لیکن وف' = سہا، وق' = سہا اور  $ف' ق > وف' + وق' - ۲ وف' سم' سم' جم' ف' وق'$

$= لا وق' - لا وف' = طہ - طہ$

$\therefore ف' ق = سہا + سہا - ۲ سہا سم' سم' جم' (طہ - طہ)$

(ب) مثلث کا رقبہ اس کے زاویہ نقطوں کے قطبی

محدوں کی رقموں میں۔

فرض کرو شکل ۵ میں ف' ق ک مثلث کے زاویہ نقطوں یعنی ف' ق اور ک کے محد و علی الترتیب (سہا، طہ) (سہا، طہ) اور (سہا، طہ) ہیں۔

تب  $\Delta$  فوق ک =  $\Delta$  فوق +  $\Delta$  وق ک -  $\Delta$  وف ک

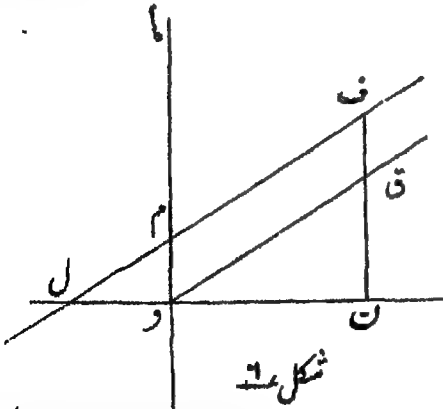
لیکن فوق =  $\frac{1}{2}$  وف  $\times$  وق جب فوق =  $\frac{1}{2}$  سما سما جب (طہ - طہ)   
 وق ک =  $\frac{1}{2}$  سما سما جب (طہ - طہ) اور وف ک =  $\frac{1}{2}$  سما سما جب (طہ - طہ)   
 پس فوق ک =  $\frac{1}{2}$  {سما سما جب (طہ - طہ) + سما سما جب (طہ - طہ)}

+ سما سما جب (طہ - طہ)   
 بطور شق طالب علم کو چاہیے کہ ذواربۃ الامتلاع فوق ک ل کا رقبہ قطبی محدود   
 میں دریافت کرے اور اس کے بعد قطبی اور کارٹیزی محدودوں کے باہمی رابطوں کی   
 مدد سے اس رقبہ کو کارٹیزی محدودوں میں تبدیل کرے۔

### ۵۹۔ خط مستقیم کی مساواتیں۔

اگر خط مستقیم محور لا کے متوازی ہو تو واضح ہے کہ اس کی مساوات   
 $1 = ب$  ہوگی جس میں ب اس کا عمودی فاصلہ محور لا سے ہے۔ اسی طرح   
 $لا = ا$  ایسے خط کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہے۔ یہاں لا اس   
 خط کا عمودی فاصلہ محور ما سے ہے۔

اگر خط مستقیم ل م ف محور لا کو نقطہ ل پر اور محور ما کو نقطہ م پر   
 قطع کرے تو فرض کرو کہ  $م = ج$  اور  $مس > ول م =$  ہر اگر خط کے کسی نقطہ   
 ف کے محدود لا یا ہوں تو ف ن   
 محور ما کے متوازی کھینچو اور مبداء



و میں سے وق دیے ہوئے خط ل م ف   
 کے متوازی کھینچو۔ دیکھو شکل ۷۔

تب  $ن ف = ن ق + ق ف$    
 $= ون سن وق لا$

+ وم

یعنی  $ما = م لا + ج$

کسی خاص خط مستقیم کے لیے ہر اور ج مستقل ہو جائے۔ واضح ہے کہ مندرجہ بالا

مساوات پہلے درجہ کی ہے۔  
(۱) پہلے درجہ کی کوئی کسی مساوات خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین صورت  $۱ لا + ۲ ب + ۳ ج = ۰$  ہے۔  
اس مساوات کے منحنی پر 'ف' 'ق' 'س' کوئی سے تین نقطے لیے جائیں اگر ان کے  
محدد (لا، لا)، (لا، لا)، اور (لا، لا) ہوں تو دی ہوئی مساوات ان محدودوں کے

لیے بھی صحیح ہوگی۔ پس  $۱ لا + ۲ ب + ۳ ج = ۰$

$۱ لا + ۲ ب + ۳ ج = ۰$

$۲ لا + ۲ ب + ۳ ج = ۰$

۲ ب اور ج کو ساٹھا کرنے سے پتہ چلتا ہے کہ  
یعنی 'ف' 'ق' 'س' نقطوں کو ملانے والے خطوط کا رقبہ  
صفر ہے۔

پس یہ نقطے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اور اس لیے  
دی ہوئی مساوات خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

طریق دیگر۔ مندرجہ بالا تین مساواتوں میں ایک مساوات کو دوسری  
مساوات میں سے خارج کرنے سے

$$۱ (لا - لا) + ۲ (ب - ب) = (لا - لا) - (لا - لا)$$

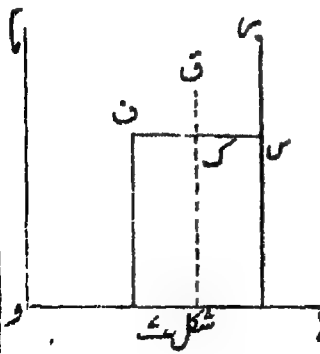
$$۱ (لا - لا) + ۲ (ب - ب) = (لا - لا) - (لا - لا)$$

$$\frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{لا - لا}{لا - لا}$$

پس  $\frac{ف ق}{س س} = \frac{ن ک}{س ق}$  (دیکھو شکل ۸)

یعنی  $\triangle ف ق س$  اور  $\triangle س ق ن$  متشابه  
ہیں جس سے واضح ہے کہ 'ف' 'ق' 'س' خط مستقیم ہے۔

اگر مساوات  $۱ لا + ۲ ب + ۳ ج = ۰$  تو  
=  $\frac{۱}{۳} لا + \frac{۲}{۳} ب$  کی صورت میں



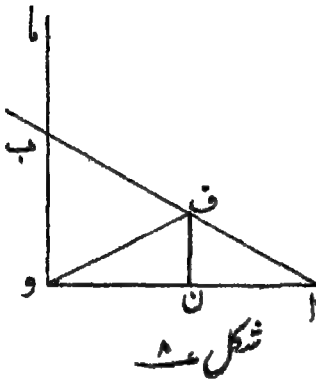


لکھیں تو معلوم ہوگا کہ یہ مساوات  $ما = ملا + ج$  کے متشابه ہے اس لیے کہ  
 $مر = \frac{1}{ب} - ج$  اور  $ج = \frac{ب}{ج}$  گویا خط مستقیم کی عام مساوات میں بھی  
 صرف دو ہی مستقل ہیں۔

(ب) خط مستقیم کی مساوات منقطعوں کی رقموں میں جو حوالہ

کے محوروں پر خط سے بنتے ہیں۔

فرض کرو شکل ۱ میں خط مستقیم  
 محور لا اور ما کو ۱ اور ب نقطوں  
 میں قطع کرتا ہے۔



۱ = لا اور ۱ = ب

فرض کرو کہ خط پر کسی نقطہ ف  
 کے محدود لا، ما ہیں۔

فن محور ما پر علی التوأم لکھیں اور  
 ون کو ملاؤ

$$\Delta ونا + \Delta وفب = \Delta داب$$

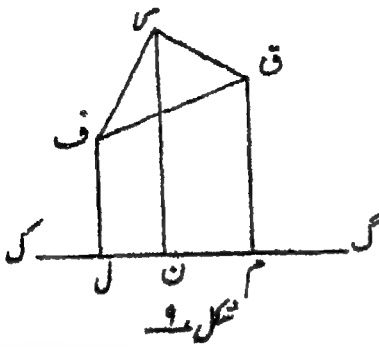
$$\therefore \Delta ونا + \Delta وفب = \Delta داب$$

$$\text{یعنی } ۱ = \frac{۱}{ب} + \frac{لا}{ب}$$

اگر محور کے منقطعوں ۱ اور ب کے متکافیوں کو ل، م سے تعبیر کریں  
 تو مندرجہ بالا مساوات صورت ل لا + م = ا میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

(ج) ایک خط پر دوسرے خط کا ظل۔

اگر کسی خط ف ق کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خط  
 ک گ پر عمود ف ل، ق م گرائے جائیں تو ل م خط ف ق کا خط ک گ پر  
 ظل کہلائیگا۔



فرض کرو سہا کوئی آدر نقطہ ہے اور

ن اس کا ظل ک گ پر۔

تب چونکہ جملہ صورتوں میں

ل م + م ن = ل ن اس سے نتیجہ

برآمد ہوتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق س

کے ظلوں کا حاصل جمع اس خط پر ف س کے

ظل کے مساوی ہے۔

اسی طرح کسی خط پر اب، ب ج، ج د، .....، ف ق کے ظلوں کا حاصل جمع

ا ق کے ظل کے مساوی ہے۔ اگر کثیر الاضلاع بند شکل کا ہو تو کسی بھی خط پر اس

کے اضلاع کے ظلوں کا حاصل جمع صفر ہوگا۔

نتیجہ صریح۔ اگر ن ضلعوں والا منتظم کثیر الاضلاع کا کوئی ایک ضلع دیے ہوئے

خط کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو اس کے دوسرے ضلع اس خط کے ساتھ سلسلہ وار

ط +  $\frac{\pi}{n}$ ، ط +  $\frac{2\pi}{n}$ ، ..... وغیرہ زاویے بنائینگے۔ پس ط کی

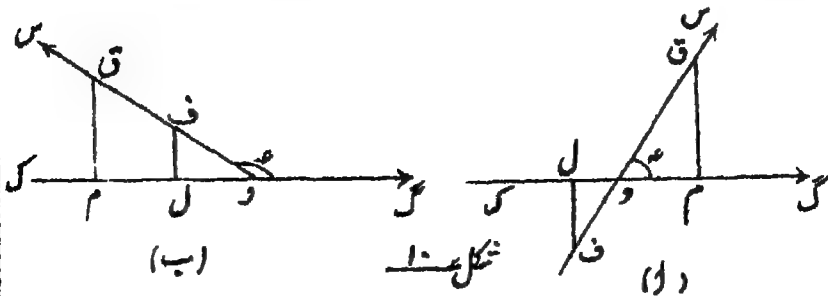
کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو

جم ط + جم (ط +  $\frac{\pi}{n}$ ) + جم (ط +  $\frac{2\pi}{n}$ ) + ..... ن رقموں تک =

ف ق جس خط پر واقع ہے اگر وہ خط ک گ کو نقطہ د میں قطع کرے اور اگر زاویہ

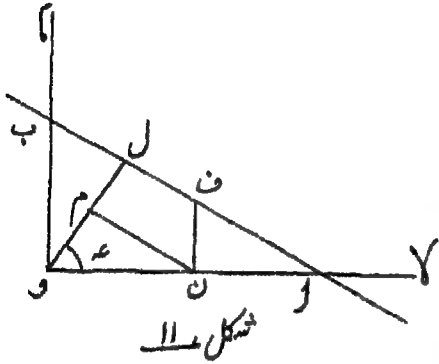
گ د س کو جو ان خطوط کی مثبت سمتوں و گ اور و س کے مابین بنتا ہے اس سے

تعبیر کیا جائے تو شکل منہ کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ



ول = وف جمعہ اور و م = وق جمعہ  $\therefore$  ل م = ف ق جمعہ  
پس کسی دبیہ ہوئے خط مستقیم ک گ پر کسی دوسرے خط ف ق کا ظل  
ف ق جمعہ ہوگا جس میں ع خط اک گ کی مثبت سمت اور اس خط کی  
مثبت سمت کا درمیانی زاویہ ہے جس پر ف ق واقع ہے۔

(د) خط مستقیم کی مساوات مبداء سے خط پر گرائے ہوئے  
عمود کے طول اور عمود اور حوالے کے کسی محور کے درمیانی زاویہ کی  
رقموں میں۔



فرض کر: خط ا ب پر مبداء سے  
گرائے ہوئے عمود ول کا طول ع ہے  
(دیکھو شکل ملا) اور اس عمود کا زاویہ  
محور و لا کے ساتھ (یعنی > لا ول)  
ع ہے۔ ف کوئی سا ایک نقطہ خط  
ا ب پر واقع ہے اور اس کے  
محدد لا، ما ہیں۔

ف ن محور ما کے متوازی کھینچو اور ن م خط ول پر عمود گراؤ۔  
ہر صورت میں > ما ول = > ما و لا + > لا ول = -> لا و ما + > لا ول = -> پ + ع  
چونکہ خط ول پر خطوط و ن اور ن ف کے طولوں کا حاصل جمع خود ول کے  
مساوی ہے۔

اور و ن کا ظل = و ن جمعہ اور ن ف کا ظل = ن ف جمعہ  $(- پ + ع) =$  ما جب ع

پس ع = لا جمعہ + ما جب ع

واضح ہو کہ یہ مساوات نقطہوں والی اور عام مساوات کے ذریعہ بھی آسانی  
ثابت ہو سکتی ہے۔ چنانچہ

(۱) شکل ملا سے ظاہر ہے کہ ع = ل جمعہ = ب جب ع پس مساوات

$$\frac{ل}{و} + \frac{ب}{ج} = ۱ \text{ میں } ۱ \text{ اور } ب \text{ کے عوض } \frac{ج}{ب} \text{ اور } \frac{ج}{ب} \text{ لکھنے سے}$$

$$۱ = \frac{لاجم ع}{ع} + \frac{ماجب ع}{ع}$$

یعنی لاجم ع + ماجب ع = ۱

$$(۲) \text{ عام مساوات } ۱ = لا + ب + ج = ۰ \text{ کو } \sqrt{(۱+۲+۳)} \text{ پر}$$

$$\text{تقسیم کرنے سے } \frac{۱}{\sqrt{(۱+۲+۳)}} + \frac{ب}{\sqrt{(۱+۲+۳)}} + \frac{ج}{\sqrt{(۱+۲+۳)}} = ۰$$

چونکہ  $\frac{۱}{\sqrt{(۱+۲+۳)}} \text{ اور } \frac{ب}{\sqrt{(۱+۲+۳)}}$  کے مربوں کا حاصل جمع اکائی ہے اس لیے  
یہ کسی زاویہ کی جیب التمام اور جیب کو تقبیر کرتے ہیں۔ اگر یہ زاویہ ع قرار دیا جائے تو

$$لاجم ع + ماجب ع = ع = ۰ \text{ جس میں ع بجائے } - \frac{ج}{\sqrt{(۱+۲+۳)}} \text{ لکھا گیا ہے}$$

(۷) کسی خطِ مستقیم کی دی ہوئی مساوات سے اس کی وضع معلوم کرنے کے  
لیے اس کے صرف دو نقطوں کے محددوں کا دریافت کر لینا کافی ہے۔ اس کے  
لیے سہولت کے لحاظ سے لایا یا ما کی کوئی سی قیمتیں فرض کر کے دی ہوئی مساوات  
سے ان کے متعلقہ ما یا لا کی قیمتیں معلوم کر لی جاسکتی ہیں۔ سب سے زیادہ  
سہولت اس میں ہے کہ حوالہ کے محوروں کے ساتھ خط کے نقاط تقاطع دریافت کر لیے  
جائیں۔ مساوات میں ما، لا کو علی الترتیب صفر لکھنے سے ان کا پتہ چل جاتا ہے۔  
اگر ایسے خطِ مستقیم کی مساوات مطلوب ہے جو کوئی سے دو شرائط کی تعمیل  
کرتا ہے تو دی ہوئی دو شرائط کی مدد سے خط کی کوئی سی عام شکل کی مساوات لے کر

اس کے دونوں مستقل دریافت کر لیے جائیں۔ مثلاً (۱)  $۱ = لا + ج$  میں  $۱ = ۰$  اور  $ج = ۰$

$$(۲) \frac{ل}{و} + \frac{ب}{ج} = ۱ \text{ میں } ۱ \text{ اور } ب \text{ ' (۲) } ۱ = لا + ج = ۰ \text{ میں } ۱ \text{ اور } ل \text{ '}$$

$$(۳) لاجم ع + ماجب ع = ع \text{ میں } ع = ۰ \text{ اور } ع \text{ اور } (۵) ۱ = لا + ب + ج = ۰$$

میں  $\frac{۱}{ج}$  اور  $\frac{ب}{ج}$ ۔ ذیل میں اس کی چند مثالیں دی جاتی ہیں۔

(و) خطِ مستقیم کی مساوات جو کسی دیے ہوئے نقطہ میں

دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدود لا، ما، ہیں اور خط کا محور کا کے ساتھ زاویہ مس ۲۰ ہے۔ خط کی مساوات  $ما = مر + لا + ج$  اور چونکہ نقطہ لا، ما اس پر واقع ہے۔

لہذا  $ما = مر + لا + ج$  پس

$ما - ما = مر (لا - لا)$

(ز) دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی

مساوات۔

اگر ان نقطوں کے محدود علی الترتیب (لا، ما،) اور (لا، ما،) ہوں تو مساوات

$لا + ب + ما + ج = ۰$  میں  
لا، ما کی یہ خاص قیمتیں نکھنے سے

$لا + ب + ما + ج = ۰$  اور  $لا + ب + ما + ج = ۰$

آخری دو مساواتوں میں سے 'ب'، 'ج' کو ماقط کرنے سے مطلوبہ مساوات

$=$  حاصل ہو جاتی ہے

(ح) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطہ تقاطع کے محدود۔

فرض کرو کہ ان خطوط کی مساواتیں

$لا + ب + ما + ج = ۰$

اور  $لا + ب + ما + ج = ۰$  ہیں

ان کا نقطہ تقاطع ان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کرے گا۔

پس ان مساواتوں کو حل کر کے لا اور ما کی جو قیمتیں حاصل تکی جائیں گی وہ اس نقطہ تقاطع کے محدود ہونگے۔ وہ حسب ذیل ہیں :-

$$\frac{1}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} = \frac{2}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} = \frac{3}{\text{ب ج} - \text{ا ج}}$$

(ط) تین خطوط مستقیم کے ایک نقطہ میں تقاطع ہونے کی شرط۔

فرض کرو ان خطوط کی مساواتیں حسب ذیل ہیں :-

۱. لا + ب + ج = ۲۰  
۲. لا + ب + ج = ۲۰  
۳. لا + ب + ج = ۲۰  
یہ خطوط ایک نقطہ میں تقاطع ہونگے اگر ان میں سے دو کے تقاطع کا نقطہ تیسرے پر واقع ہوگا۔

پہلی اور دوسری مساوات کے نقطہ تقاطع کے محدودوں کی تصریح۔

$$\frac{1}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} = \frac{2}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} = \frac{3}{\text{ب ج} - \text{ا ج}}$$

اس نقطہ تقاطع کے محدودوں کو تیسری مساوات میں درج کرنے سے ہمیں معلوم ہو جاتا ہے کہ یہ نقطہ تیسرے خط پر واقع ہونے کی شرط کیا ہے۔ وہ شرط حسب ذیل ہے :-

$$\frac{1}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} + \frac{2}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} = \frac{3}{\text{ب ج} - \text{ا ج}}$$

$$\frac{1}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} + \frac{2}{\text{ب ج} - \text{ا ج}} = \frac{3}{\text{ب ج} - \text{ا ج}}$$

(ی) دی ہوئی مساواتوں والے دو خطوط مستقیم کے درمیانی

زاویہ کی تعین۔

(۱) اگر ان خطوط کی مساواتیں شکل لا جم ع + ما جب ع = ع =

اور لا جم ع + ما جب ع = ع = دی جائیں تو ان کا درمیانی زاویہ (ع - ع) ہوگا۔

یا ع - ع = ع - ع ہوگا۔

اس لیے کہ ع وہ زاویہ ہے جو ان خطوط پر مبداء سے گرائے ہوئے

عمود علی الترتیب محور کا ساتھ بناتے ہیں۔ اور کوئی سے دو خطوط کا درمیانی زاویہ ان خطوط کے عمودوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے یا اس کا مکمل ہوتا ہے۔  
(۲) اگر مساواتیں شکل  $ما = مر_۱ + ج_۱$  اور  $ما = مر_۲ + ج_۲$  ہوں تو محور کا ساتھ ان خطوط کے زاویوں کو طم اور طم سے تعبیر کرنے سے،  
مس طم = مر اور مس طم = مر

∴ مس (طم - طم) =  $\frac{مر_۱ - مر_۲}{+ مر_۱ + مر_۲}$  پس زاویہ مطلوبہ = مس  $\frac{مر_۱ - مر_۲}{+ مر_۱ + مر_۲}$   
واضح ہے کہ خطوط باہدگیر علی القوائم ہونگے اگر  $ا + مر_۱ + مر_۲ = ۰$  اور متوازی ہونگے اگر  $مر_۱ = مر_۲$

(۳) اگر مساواتیں شکل  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  اور  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  ہوں تو ان کو  $ما = - \frac{لا + لا + ب}{ج}$  اور  $ما = - \frac{لا + لا + ب}{ج}$  کی شکل میں تبدیل کرنے اور (۲) سے مقابلہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ زاویہ مطلوبہ

$$\text{مس} = \frac{- \frac{لا + لا + ب}{ج} + \frac{لا + لا + ب}{ج}}{+ \frac{لا + لا + ب}{ج} + \frac{لا + لا + ب}{ج}} \text{ یعنی مس} = \frac{لا + لا + ب}{لا + لا + ب + ب + ب}$$

یہ خطوط باہدگیر علی القوائم ہونگے اگر  $لا + لا + ب + ب + ب = ۰$

اور متوازی ہونگے اگر  $ب + ب + ب = ۰$  یعنی اگر  $\frac{لا}{ج} = \frac{لا}{ج}$   
واضح ہے کہ خطوط کے باہدگیر علی القوائم ہونے کی شرط کی تکمیل ہو جاتی ہے اگر ان کی مساواتیں  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  اور  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  ہوں یا  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  اور  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  ہوں۔

مسائل کے حل کرنے کے لیے یہ مفید رابطے ہیں اس لیے کہ اگر کسی دیے ہوئے خط کی مساوات میں اگر ہم لا اور ما کے سروں کو باہدگیر تبدیل کر دیں (یا منقلب کر دیں) اور ان میں سے کسی ایک کی علامت کو بدل دیں تو ہمیں ایک علی القوائم خط کی مساوات مل جاتی ہے۔ اگر اس خط کے لیے مزید کسی شرط کا پورا کرنا مقصود ہو تو اس کی متعلقہ مساوات کی مستقل رقم کو مناسب قیمت دی جانی چاہیے۔

(ک) خط مستقیم ۱ لا + ب ما + ج = کے مثبت اور منفی جانبوں کی تعریف۔

فرض کرو کسی نقطہ ق کے محدود لا، ما، ہیں۔ اور اس نقطہ میں سے محور ما کے متوازی جو خط کھینچا جاتا ہے دیے ہوئے خط کو نقطہ ف میں جس کے محدود لا، ما، میں قطع کرتا ہے۔ اگر فنکل کھینچ کر دیکھا جائے تو واضح ہوگا کہ جب تک ق خط مستقیم کی ایک ہی جانب واقع ہے ق ف ایک ہی سمت میں کھینچا جاتا ہے۔ اور ق ف مخالف سمت میں کھینچا جائے اگر ق کوئی سا نقطہ اس خط مستقیم کی دوسری جانب ہے۔

یعنی ق ف خط مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

چونکہ ق ف = ما - لا، ..... (۱)

اور لا + ب ما + ج = لا + ب ما + ج - (لا + ب ما + ج)  
اس لیے کہ نقطہ ف جس کے محدود لا، ما، مانے گئے ہیں خط لا + ب لا + ج = واقع ہونے کی وجہ سے لا + ب ما + ج = ۰ {

∴ لا + ب ما + ج = - ب (ما - لا) ..... (۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) پر غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ لا + ب ما + ج = خط مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

اگر کسی خط مستقیم کی مساوات لا + ب ما + ج = ۰ اور کسی نقطہ کے محدود لا، ما، جملہ لا + ب ما + ج میں درج کیے جائیں تو اگر لا + ب ما + ج مثبت ہو تو نقطہ لا، ما، خط کی مثبت جانب متصور ہوگا اور اگر لا + ب ما + ج منفی ہو تو نقطہ لا، ما، خط کی منفی جانب متصور ہوگا۔

(ل) کسی دیے ہوئے خط سے دیے ہوئے نقطہ کے





طریق دیگر۔ چونکہ  $ا + لا + ب + ما + ج =$  کے علی القوائم خط کی مساوات  $تب لا - ا + ما + ج =$  ہے اور ایسا خط جو نقطہ  $لا$  میں سے گزرتا ہے اس کی مساوات  $ب (لا - لا) - ا (ما - لا) =$  ہے۔ اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ ک میں (جس کے محدد  $لا$   $ما$  ہیں) ملتا ہے تو چونکہ ک دونوں خطوط پر واقع ہے۔۔

لہذا  $ب (لا - لا) - ا (ما - لا) =$  ..... (۱)

اور  $ا + لا + ب + ما + ج =$  اس آخری مساوات کو ہم لکھ سکتے ہیں

$$ا + لا + ب + ما + ج = (ا + لا + ب + ما) - (ا + لا + ب + ما)$$

یا  $ا (لا - لا) + ب (ما - لا) = - (ا + لا + ب + ما + ج) \dots (۲)$

(۱) اور (۲) مساواتوں کے مربعوں کو جمع کرنے سے

$$(ا + ب) = \{ (ا - لا)^2 + (ما - لا)^2 \} = (ا + لا + ب + ما + ج)^2$$

$$\text{لیکن ک ف} = \sqrt{(ا - لا)^2 + (ما - لا)^2}$$

$$\therefore \text{ک ف} = \frac{ا + لا + ب + ما + ج}{(ا + ب)}$$

پس اگر کسی خط مستقیم کی مساوات بشکل  $ا + لا + ب + ما + ج =$  دی گئی ہے تو اس سے کسی دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ  $ا$  اس نقطہ کے تحت دونوں کو جملہ  $ا + لا + ب + ما + ج =$  میں تقویم کرنے اور  $لا$  اور  $ما$  کے سروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے جذر المربع پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر  $ا + ب$  کو ہمیشہ مثبت مانیں تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور خط کی منفی جانب کے کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔

(م) دیے ہوئے دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کی

تخصیص کرنے والے خطوط کی مساواتیں۔

دو خطوط مستقیم کے درمیان فی زاویوں کی تنصیف کرنے والے دو خطوں میں سے کسی ایک پر کے کوئی اسے نقطہ سے جو عمود ان خطوط مستقیم پر گرائے جاتے ہیں بجا مواز مقدار ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

پس ان خطوط کی مساواتیں اگر

اور (۱) کوئی ساقطہ ان کے دو منصفوں میں سے کسی ایک منصف پر واقع ہو تو

$$\frac{ج + ب + ا}{ب + ا} \quad \text{اور} \quad \frac{ا + ب + ج}{ب + ا}$$

(ن) دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات۔

سب سے سیدھا طریقہ مطلوبہ مساوات کے حاصل کرنے کا یہ ہے کہ دیے ہوئے خطوط کا نقطہ تقاطع (لا، ما) پہلے معلوم کر لیا جائے اور پھر اس نقطہ میں سے گزرنے والے خط کی عام مساوات بشکل ما = مر (لا - لا) استعمال کی جائے۔ لیکن بعض اوقات مندرجہ ذیل طریقہ بہتر پایا جاتا ہے۔

فرض کرو ان دو خطوط کی مساواتیں  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  ..... (۱)

اور  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  ..... (۲) ہیں

اب مساوات لا + لا + ب + ما + ج + لا = لا + لا + ب + ما + ج = ۰ ..... (۳) پر غور کرو۔ چونکہ وہ پہلے درجہ کی ہے اس لیے ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔ اور اگر نقطہ (لا، ما) دونوں خطوط کا مشترک ہے تو

$لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  اور  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$

اور اس لیے  $(لا + لا + ب + ما + ج) + لا = لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  اور اس سے ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) مساوات (۳) والے خط پر واقع ہے۔

پس مساوات (۳) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات ہے۔ لہ کو اگر مناسب قیمت دی جائے تو اس مساوات سے کسی اور شرط کی بھی تکمیل کرائی جاسکتی ہے۔ مثلاً یہ خط کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے بھی گزارا جاسکتا ہے۔ پس مساوات (۲) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے خطوط (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے تمام خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

(س) اگر تین خطوط مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$

$لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  اور  $لا + لا + ب + ما + ج = ۰$  ہوں اور اگر ہم لہ، ما نہ

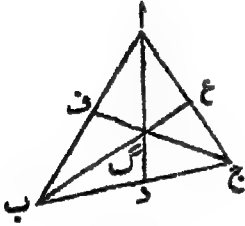
حین ایسے مستقل دریافت کر سکتے ہیں جن کے لیے رابطہ

لہ (لا + لا + ب + ما + ج) + ما = لا + لا + ب + ما + ج = ۰ ..... (۱)

متماثل صحیح ہو یعنی لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہو تو یہ تینوں خطوط مستقیم

ایک نقطہ پر ملینگے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدود خطوط کی مساواتوں میں سے کوئی سی دو مساواتوں کی شرط کو پورا کرے تو رابطہ (۱) بتاتا ہے کہ وہ نقطہ تیسری مساوات کی شرط کو بھی پورا کریگا۔ یہ اصول بحثرت مستعمل ہے۔

مثال — مثلث کے زاویہی نقطوں کو ان کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں سے ملانے والے خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔



شکل ۱۳۔

شکل ۱۳ میں فرض کرو 'ا'، 'ب'، 'ج' زاویہی نقطوں کے محدود علی الترتیب (لا، لا، لا) (لا، لا، لا) اور (لا، لا، لا) ہیں۔ تب ان کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں 'د'، 'ع'، 'ف' کے محدود علی الترتیب

$$\left( \frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲} \right) \text{ اور } \left( \frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲} \right)$$

$$\text{پس خط 'ا' کی مساوات } \frac{لا - لا}{لا + لا + لا} = \frac{لا - لا}{لا + لا + لا} \text{ ..... (۱) ہوگی۔}$$

یعنی (لا + لا + لا) - (لا + لا + لا) = (لا + لا + لا) - (لا + لا + لا) = (لا + لا + لا) - (لا + لا + لا) = ۰

$$\text{اسی طرح 'ب' اور 'ج' کی مساواتیں علی الترتیب } (لا + لا + لا) - (لا + لا + لا) = ۰ \text{ ہوگی۔}$$

اور چونکہ یہ مساواتیں جب جمع کی جاتی ہیں تو متبادلاً معدوم ہو جاتی ہیں، اس لیے وہ خطوط جن کو یہ تعبیر کرتی ہیں ایک نقطہ پر ملنے جا رہیں۔

[مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے آسانی معلوم ہو جائیگا کہ نقطہ 'گ'

جس کے محدود  $\frac{۱}{۳}$  (لا + لا + لا) اور  $\frac{۱}{۳}$  (لا + لا + لا) ہیں خط 'ا' پر واقع

ہے۔ اور اس نتیجہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ گ خطوط 'ب'، 'ج'، 'ف' پر

بھی واقع ہے۔]

(ع) ن ویں درجہ کی متجانس مساوات، مبدا میں سے گزرنے والے ن خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$۱) \text{ م} + \text{ب م} - ۱ \text{ لا} + \text{ج م} - ۲ \text{ لا}^۲ + \dots + \text{ک ل} = ۰ \dots (۱) \text{ ہے}$$

اس کو لان پر تقسیم کرو تو

$$۱) \left(\frac{۱}{ل}\right) + \text{ب} \left(\frac{۱}{ل}\right) - \left(\frac{۱}{ل}\right) + \text{ج} \left(\frac{۱}{ل}\right) - \left(\frac{۲}{ل}\right) + \dots + \text{ک} = ۰ \dots (۲)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں  $\text{م}_۱, \text{م}_۲, \dots, \text{م}_ن$  ہیں۔

$$\text{تب وہ اور } ۱) \left(\frac{۱}{ل} - \text{م}_۱\right) \left(\frac{۱}{ل} - \text{م}_۲\right) \dots \left(\frac{۱}{ل} - \text{م}_ن\right) = ۰$$

ایک ہی ہیں۔ اس لیے اس کی شرائط تکمیل کو پہنچتی ہے جبکہ  $\frac{۱}{ل} - \text{م}_۱ = ۰$ ، جبکہ  $\frac{۱}{ل} - \text{م}_۲ = ۰$  وغیرہ

اور دوسری کسی صورت میں نہیں پہنچتی۔

پس مساوات (۱) جس طریق کو تعبیر کرتی ہے اس کے تمام نقطے مندرجہ ذیل ن خطوط مستقیم میں سے ایک یا دوسرے خط پر واقع ہیں:

$$\text{م} - \text{م}_۱ \text{ لا} = ۰, \text{ م} - \text{م}_۲ \text{ لا} = ۰, \dots, \text{ م} - \text{م}_ن \text{ لا} = ۰$$

(ف) مساوات  $۱) \text{ لا} + ۲) \text{ ب م} + \text{لا م} + \text{ج م} - ۲ = ۰$  کے ذریعہ جن

دونوں خطوط مستقیم کی تعبیر کی جاتی ہے ان کے درمیانی زاویہ کی یقین۔

اگر خطوط  $\text{م} - \text{م}_۱ \text{ لا} = ۰$  اور  $\text{م} - \text{م}_۲ \text{ لا} = ۰$  ہوں تو  $(\text{م} - \text{م}_۱ \text{ لا}) (\text{م} - \text{م}_۲ \text{ لا}) = ۰$ ۔

اور دی ہوئی مساوات  $(\text{م} + ۲) \left(\frac{\text{ب م}}{\text{ج}}\right) + \text{لا م} + \left(\frac{۱}{ج} - \text{لا}\right) = ۰$  دونوں ایک ہی ہیں۔

$$۰ = \text{م}_۱ + \text{م}_۲ = \frac{\text{ب م}}{\text{ج}} \dots (۱) \text{ اور } \text{م}_۱ \text{ م}_۲ = \frac{۱}{ج} \dots (۲)$$

اگر ان خطوط کے مابین زاویہ طہ ہو تو مس طہ =  $\frac{\text{م}_۱ - \text{م}_۲}{\text{م}_۱ + \text{م}_۲} = \frac{\text{ب م} - \text{ج}}{\text{ب م} + \text{ج}}$

ازروئے رابطہ (۱) اور (۲)  
 اگر ب<sup>۱</sup>۔ ا ج مثبت ہو تو خطوط حقیقی ہونگے۔ اگر ب<sup>۱</sup>۔ ا ج = ۰۔ تو  
 دونوں منطبق ہونگے۔ اگر ب<sup>۱</sup>۔ ا ج منفی ہو تو خطوط خیالی ہونگے لیکن حقیقی نقطہ  
 (۰، ۰) میں سے گزریں گے۔

مساوات ۱ لا<sup>۱</sup> + ب<sup>۲</sup> لا<sup>۱</sup> + ج<sup>۳</sup> ما<sup>۱</sup>۔ والے خطوط باہر گیر علی القواہم ہونگے  
 اگر ا<sup>۱</sup> + ج = ۰۔ یعنی اگر لا<sup>۱</sup> + ب<sup>۲</sup> کے سرول کا حاصل جمع صفر ہو گا۔

رہے (دوسرے درجہ کی عام مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرنے کی  
 شرط کی تعیین۔

دوسرے درجہ کی عام ترین مساوات لا<sup>۱</sup> + ج<sup>۲</sup> لا<sup>۱</sup> + ب<sup>۲</sup> ما<sup>۱</sup> + گ<sup>۲</sup> لا<sup>۱</sup> +  
 ۲ ف<sup>۲</sup> ما<sup>۱</sup> + ج = ۰ ..... (۱) ہے  
 اگر یہ متماثل (ل لا + م ما + ن) (ل لا + م ما + ن) = ۰ ..... (۲)  
 کے مساوی ہے۔

تو (۱) اور (۲) مساواتوں میں متعلقہ سرول کو مساوی لکھنے سے  
 ل ل = ا<sup>۱</sup>، م م = ب<sup>۲</sup>، ن ن = ج<sup>۳</sup>  
 م ن + م ن = ۲ ا<sup>۱</sup>، ن ل + ل ن = ۲ ب<sup>۲</sup>، ل م + م ل = ۲ ج<sup>۳</sup>  
 آخر الذکر تین رابطوں کو مسلسل ضرب دینے سے  
 ۸ ف<sup>۲</sup> گ<sup>۲</sup> ج = ۲ ل ل م م ن ن + ل ل ل ل (م م ن ن + م م ن ن) +

م م (ن ن ل ل + ل ل ن ن) + (ل ل م م + ل ل م م)

= ۲ ا<sup>۱</sup> ب<sup>۲</sup> ج + ۲ (۲ ف<sup>۲</sup> - ۲ ب<sup>۲</sup> ج) + ب<sup>۲</sup> (م م ک<sup>۲</sup> - ۲ ج ل) + ج (م م ج<sup>۲</sup> - ۲ ل ب)

پس ا<sup>۱</sup> ب<sup>۲</sup> ج - ۲ ف<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup> گ<sup>۲</sup> - ج<sup>۳</sup> + ۲ ف<sup>۲</sup> گ<sup>۲</sup> ج = ۰ ..... (۳)  
 مطلوبہ شرط ہے۔

{ الا اس صورت کے کہ جس میں لا اور ما کے سر و دونوں صفر ہیں مندرجہ بالا

نتیجہ دی ہوئی سادات کو بطور لا اور ماکا دو درجی سادات کے حل کرنے سے زیادہ سادگی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے۔

+ (ب ما<sup>۲</sup> + ج<sup>۲</sup>) = . لکھ کر لاکی دو درجی مساوات کی طرح حل کریں

$$(1 + \text{ح} + \text{ا} + \text{گ} = \pm \text{ا} + \{\text{ح} - \text{ب}\} + \text{ا} + \{2 + \text{ع} - \text{گ} - \text{ف}\} + \text{ا} + \text{گ} - \text{ج} \}$$

یہ مساوات  $1 + a + b = 0$  کی صورت میں تحویل پذیر ہونے کے لیے ضروری اور کافی ہوگا کہ جذر المربع کی علامت کے نیچے کی مقدار کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

(ج-۱) (ب-۱) (گ-۱) = (ج-۲) (گ-۲) (ف-۲)

اس کو پھیلا کر ۱ پر تقسیم کریں تو یہ (۳) کے معادل پائی جائیگی۔

(ق) خطِ مستقیم کی قطبی مساوات

فرض کرو و سبدا رہے اور محور ولا کے لحاظ سے زاویہ طہر ناپا جاتا ہے۔

وے ہوئے خطِ مستقیم پر ف

کوئی سا نقطہ ہے جس کے قطبی انحدار  
 زاویہ ہے۔ شکل ۱۲۔

نبدار سے خط پر عمود و

گرایا جاتا ہے،  $\omega = c = \text{خ اور زاویہ}$

ۛ = ۛ و ۛ

اعرف (ط-ع) اور

وقف جمع وف = وع

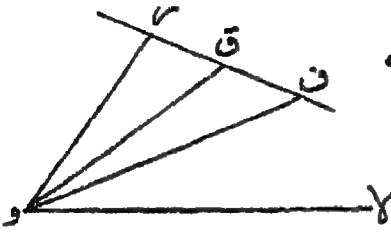
پس مطلوبہ مساوات = رجم (ط - ع) = ع

خطِ مستقیم کی مساوات لاجم  $\text{ع} + \text{ع} = \text{ع}$  میں لاکے عوض رجم طہ اور ما کے

موسمِ رجب طے لکھنے سے بھی منحصر بالامدادات حاصل ہو جاتی ہے۔



(سا) دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی قطبی مساوات۔



شکل ۱۵

فرض کرو ف، ق دیے ہوئے دو نقطے ہیں جن کے محدود بالترتیب م، طم اور م، طم ہیں۔ اگر سا خطِ مستقیم پر کوئی سا دوسرا نقطہ ہے جس کے محدود ر، طم ہیں تو

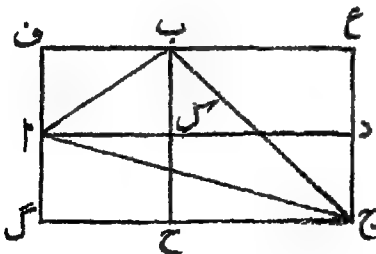
چونکہ  $\Delta ف وق + \Delta ق و س$

$= \Delta ف و س$

لہذا م، ر جب (طم - طم) + م، ر جب (طم - طم) - ر، ر جب (طم - طم) = پس مطلوبہ مساوات = م، ر جب (طم - طم) + م، ر جب (طم - طم) + ر، ر جب (طم - طم) =

(مش) ذیل میں چند اہم مثالیں حل کر کے بتائی جاتی ہیں :-  
(۱) ایک مثلث کے ضلعوں پر بطور وتروں کے متوازی الاضلاع کھینچے جاتے ہیں جن کے ضلعے محور لا و ما کے متوازی ہیں۔ بتاؤ کہ ان متوازی الاضلاعوں کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملینگے۔

مثلث (ب ج ح) کے زادی نقطوں کے محدودوں کو علی الترتیب (لام، ما، لام، ما) اور (لام، مام) مانو۔



شکل ۱۶ میں یہ متوازی الاضلاع بتائے گئے ہیں۔ یہیں ثابت کرنا ہے کہ وتر ف، ع، ح اور د، گ ایک نقطہ پر ملینگے۔

چونکہ ف اور گ کے محدود (لام، مام) اور (لام، ما) ہیں۔

شکل ۱۶

پس ف گ کی مساوات  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$  ہے۔

یعنی لا (ما - ما) + ما (لا - لا) + لا (لا - لا) = ۰ ہے  
اسی طرح وتر ع ج کی مساوات

لا (ما - ما) + ما (لا - لا) + لا (لا - لا) = ۰ ہے

اور وتر د گ کی مساوات لا (ما - ما) + ما (لا - لا) + لا (لا - لا) = ۰ ہے

ان تینوں مساواتوں کا حاصل جمع متساویاً صفر ہے لہذا یہ تینوں خطوط مستقیم

ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۲) ایک ثابت نقطہ میں سے کوئی ساخط مستقیم کھینچا جاتا ہے جو محور لا و ما

کو علی الترتیب خطوط ف اور ق میں قطع کرتا ہے اور متوازی الاضلاع و ف س ق  
مکمل کر دیا جاتا ہے۔ سر کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ س کے محدود ک اور گ ہیں۔ خط ف ق کی کسی ایک

وضع میں اگر مساوات  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = ۱$  ..... (۱)

مافی بجائے تو نقطہ س کے محدود ع اور

بہ ہونگے۔

لیکن چونکہ خط ف ق نقطہ ک گ

میں سے گزرتا ہے مساوات (۱) میں بجائے

لا و ما ہم علی الترتیب ک و گ لکھ سکتے ہیں۔

پس  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = ۱$  ..... (۲)

شکل ۱۷

اس لیے نقطہ س کے محدود ع اور بہ ہر صورت میں مساوات (۲) کی توفیق

کر نیگے۔ ان کو اگر ہم لا و ما سے تعبیر کریں تو س کے طریق کی مساوات

$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = ۱$  ہوگی۔

(۳) ایک مثلث ل ب ج کے زاویہ نقطوں کے محدود علی الترتیب

(لا، ما)، (لا، ما)، (لا، ما) ہیں۔ اس کے اندرونی اور باہری دائروں کے

مرکز معلوم کرو۔

خطیب ج کی مساوات  $ما (لا - لا) - لا (ما - ما) + ما (لا - لا)$   
 $- لا (لا - لا) = ۰ \dots \dots (۱)$  ہے

خطیب ج کی مساوات  $ما (لا - لا) - لا (لا - لا) + لا (لا - لا) = ۰ \dots \dots (۲)$   
 اور  $اب کی مساوات  $ما (لا - لا) - لا (لا - لا) + ما (لا - لا)$$

$- لا (لا - لا) = ۰ \dots \dots (۳)$

ان خطوط پر اندرونی اور باہری دائروں میں سے کسی بھی دائرے کے مرکز سے گرائے ہوئے عمود مقلہ میں مساوی ہیں پس از روئے دل (ان چار دائروں کے مرکزوں کے محدود مندرجہ ذیل رابطوں کے لا اور ما ہیں

$$\frac{ما (لا - لا) - لا (لا - لا) + ما (لا - لا) - لا (لا - لا)}{ما (لا - لا) + لا (لا - لا)}$$

$$\frac{ما (لا - لا) - لا (لا - لا) + ما (لا - لا) - لا (لا - لا)}{ما (لا - لا) + لا (لا - لا)} = \pm$$

$$\frac{ما (لا - لا) - لا (لا - لا) + ما (لا - لا) - لا (لا - لا)}{ما (لا - لا) + لا (لا - لا)} = \pm \quad (۴)$$

اگر مثلث کے زاویہ نقطوں 'ب' ج کے محدودوں کو علی الترتیب

مساوات (۱)، (۲) اور (۳) میں تعین کریں تو ان سب کے سیدھے جانب کے چلے ایک ہی ہونگے۔ پس مثلث کے زاویہ نقطے یا تو سب کے سب خطوط (۱)، (۲)، (۳) کے مثبت جانب ہونگے یا سب کے سب ان کے منفی جانب اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر جو عمود ڈالے جاتے ہیں سب کے سب اسی سمت میں پھینچے جاتے ہیں جس سمت میں مثلث کے زاویہ نقطوں کے عمود۔ پس اندرونی دائرہ کے لیے روابط (۴) میں مثبت منفی کا جہاں اشتباہ بتایا گیا ہے

وہ سب مثبت ہونگے۔

جانبی تین دائروں کے لیے یہ علامتیں علی الترتیب  $++-+-$  اور  $++--$  ہونگی۔

روابط (م) کی کسروں کے نسب نماؤں پر غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ وہ مثلث (ب ج کے ضلعے) (ب ج ہیں۔

اگر (لا، ما) اندرونی دائرہ کے مرکز کے متحد ہیں یعنی روابط (م) کی مثبت علامتوں میں سے صرف مثبت علامتیں لی جائیں گی تینوں شمار کنندوں کا حاصل جمع  $\Delta^2 =$  اور تینوں نسب نماؤں کا حاصل جمع  $= (ا + ب + ج)$  کیونکہ اس حاصل جمع میں لا اور ما کے سرورنوں صفر ہیں۔ پس نسبتوں کے خواص کی رُو سے دی ہوئی

$$\text{تینوں کسروں میں سے ہر ایک کسر} = \frac{\Delta^2}{(ا + ب + ج)}$$

اب شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو سلسلہ وار لا، لام اور لام سے ضرب دو اور جمع کرد۔

$$\text{تب ہر ایک کسر} = \frac{\Delta^2 لا}{(لا + ا + ب + ج لام)}$$

$$\text{پس} = \frac{\Delta^2}{(ا + ب + ج)} = \frac{\Delta^2 لا}{(لا + ا + ب + ج لام)}$$

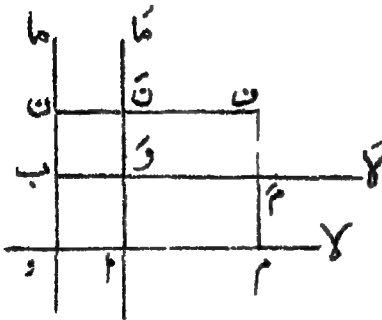
$$\text{لہذا لا} = (ا + ب + ج) = (لا + ا + ب + ج لام)$$

اس طرح ما  $= (ا + ب + ج) = (لا + ا + ب + ج لام)$  ان دو مساواتوں سے مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود اس کے زاویہ نقطوں کے محدودوں اور اس کے ضلعوں کے طولوں کی رقومیں حاصل ہوتے ہیں۔

(داخل ہو کہ اوپر کی تین مثالوں کا حل نہ صرف علی القوائم محدودوں کے لیے صحیح ہے بلکہ اہل محدودوں کے لیے بھی۔)

(ت) محدودوں کا استحالہ۔

جب محوروں کا انتخاب اختیاری ہوتا ہے تو ایسے محور منتخب ہو سکتے ہیں جن سے کسی مسئلہ کے حل کرنے میں بہت زیادہ سہولت حاصل ہو۔ کسی صورت میں بھی محوروں کی تبدیلی ایک خاص اہمیت رکھتی ہے۔ ہم اب بتائینگے کہ اگر کسی منحنی کی مساوات محوروں کے ایک نظام کے لحاظ سے دی گئی ہو تو ان کے کسی دوسرے نظام کے لحاظ سے اس مساوات کی کیا صورت ہوگی۔



(۱) محدودوں کے مبداء کی تبدیلی محوروں کی سمتوں کی تبدیلی بغیر

فرض کر دو کہ ابتدائی محور و لا

شکل ۱۸

اور و ما تھے اور جدید محور و لا اور و ما ہیں۔ دیکھو شکل ۱۸۔ نئے مبداء کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالہ سے اور ک ہیں۔ ن دے ہوئے منحنی کا ایک نقطہ ہے۔ چونکہ و ف اور و ف کے نطل محور و لا پر مساوی ہیں لہذا لا = لا + و اسی طرح ما = ما + ک

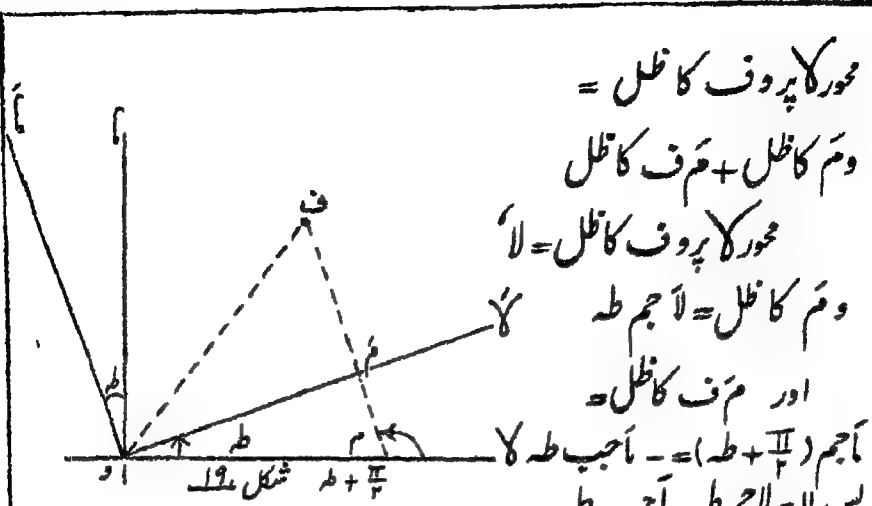
نئے محدودوں کی رمتوں میں منحنی کی مساوات حاصل کرنے کے لیے دی ہوئی مساوات میں ابتدائی محدودوں کے عوض ان کی مندرجہ بالا قیمتیں درج کر دی جائیں۔

(۲) مبداء کی تبدیلی بغیر محوروں کا گھماؤ زاویہ طہ میں۔

بہ لحاظ قدیم محور و لا و ما۔

نقطہ ق کے محدود لا اور ما ہیں اور بلحاظ جدید محور (یعنی و لا و ما) لا اور ما دیکھو شکل ۱۹۔

و ف خط کھینچو اور ف م محور و لا پر عمود گر او۔



اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان کے مقطوعے مقدار میں مساوی ہیں۔ بتاؤ کہ ان کی مساویں لا + ما = ۱۔ اور لا۔ ما۔ ۷ = ۰ ہیں۔

(۶) ایک مثلث کے اضلاع کی مساویں لا۔ ۷۔ ما + ۲۵ = ۰۔  
 ۵ + لا + ما + ۱۱ = ۰ اور لا۔ ما۔ ۲ = ۱۔ ۰ ہیں ثابت کرو کہ مبداء مثلث کے اندر واقع ہے اور اس کے راسوں کے محدود علی الترتیب (-۱، ۲)، (۳، ۴) اور (۴، ۳) ہیں۔

(۷) آج ایک مثلث ہے جس کے زاویعی نقطوں کے محدود علی الترتیب (۱، ۲)، (۲۵، ۸) اور (۹، ۳۱) ہیں۔ بتاؤ کہ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود ۱۱ اور ۱۱ ہیں۔

(۸) تین خطوط کی مساویں ما = ص لا + ج، ما = ص لا + ج اور ما = ص لا + ج ہیں۔ ان سے جو مثلث تیار ہوتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔  
 (۹) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے جو عمود دیے

ہوئے دو خطوط مستقیم پر گرائے جاتے ہیں ان کے طوؤں کا حاصل جمع مستقل ہے بتاؤ کہ نقطہ کا طریق ایک خط متقیم ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کسی بھی مثلث کے ضلعوں کے عمودی منصف ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۱) ثابت کرو کہ مثلث کے راسوں سے ان کے مقابل کے ضلعوں پر جو عمود گرائے جاتے ہیں وہ سب ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۲) وہ تمام خطوط جن کے لیے  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$  متقل سب کے سب ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ اس نقطہ کے محدود معلوم کرو۔ اور ب باہمی علی القوائم محوروں کے مقطوعے ہیں۔

[اس مثال سے پتلے عدسہ کے ماسکی طول کی پائش کا اچھا طریقہ ہاتھ آتا ہے اس کی توضیح کرو۔]

(۱۳) جو تھے سوال کی عمومی صورت کو پیش نظر رکھ کر لینے خط کی مساویں لا + ب، ما + ج = ۰ اور نقطوں کے محدودوں کو (لا، ما) اور (لام، ما) مان کر

ثابت کرو کہ کوئی ساخط مستقیم کسی مثلث کے ضلعوں فم فم فم اور فم فم کو نقطوں ل، م اور ن پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ

$$1 - \frac{ف ل}{ل فم} \times \frac{ف م}{م فم} \times \frac{ف ن}{ن فم} = 1$$

(۱۴) ثابت کرو کہ مساوات لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> = ۱۸ = ۰

دو خطوط متقیم کو تعبیر کرتی ہے جن کا درمیانی زاویہ ۴۵° ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر لہ = ۲ تو مساوات لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> = ۱۱

- لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> = ۰ دو خطوط متقیم کو تعبیر کرتی ہے اور ان کا درمیانی زاویہ ۳۰° ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات ب<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> = ۰ دو خطوط متقیم

کو تعبیر کرتی ہے جو علی الترتیب خطوط ۱ لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> = ۰ کے علی القوائم ہیں۔

(۱۷) 'آ ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ آ کو قطب اور ب کو

حوالہ کا خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور اس کے دو وتروں کی قطبی مساواتیں دریافت کرو۔

(۱۸) ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ۱ لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۲</sup> = ۰ اور

$$ل + لا + م + ن = ۰ \text{ سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ} = \frac{ن لا^۲ - لا ب^۲}{۲(م - لا + ب)}$$

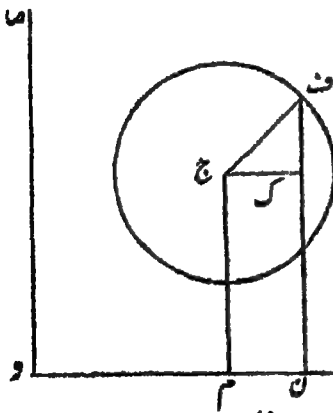


# سائوال باب

## دائرہ کی مساواتیں

۵۸ (۱)۔ دائرہ کی مساوات علی القوائم محوروں کے حوالہ سے

فرض کرو شکل ۵۸ میں دائرہ کا مرکز ج ہے اور ف اس کے محیط پر کوئی سا نقطہ ہے۔ ج کے محدودہ اور یہ مانو اور ف کے محدودہ لا اور ما۔ دائرہ کا نصف



شکل ۵۸

قطر ص فرض کرو۔ ج م  
ف ن محور و ما کے متوازی  
کھینچو اور ج ک محور و لا کے  
متوازی۔ تب

ج ک + ک ف  
= ج ف لیکن ج ک = لا۔ عہ

اور ک ف = ما۔ بہ

∴ (لا۔ عہ) + (ما۔ بہ)

= ص<sup>۱</sup> + ص<sup>۲</sup> . . . . . (۱)

یہ دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر محدودہ و لا کا مسدود خود مرکز دائرہ مانا جائے تو عہ اور بہ دونوں صفر ہونگے اور مساوات حسب ذیل ہوگی۔



(ب) منحنی کے مماس اور عماد۔ فرض کرو کہ کسی منحنی پر بھی دو نقطے

ف، ق لیے جاتے ہیں اور ق منحنی پر حرکت کر کے ف کے قریب تر ہوتا جاتا ہے اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے۔ تب خط ف ق اس انتہائی وضع میں منحنی کا نقطہ ف پر کا مماس کہلاتا ہے۔

اور ف پر جو خط اس مماس کے علی القواکم کھینچا جاتا ہے منحنی کا اس نقطہ پر کا عماد کہلاتا ہے۔

(۱) دائرہ لا + ما = ص کے کسی نقطہ پر کے خط مماس کی

مساوات معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ اس پر کے دو نقطوں کے محدد لا، ما اور لا، ما ہیں۔ ان میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{ما}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}}{\text{ما} - \text{ما}} \dots \dots \dots (۱)$$

چونکہ یہ دونوں نقطے دائرہ پر واقع ہیں لہذا لا + ما = ص اور لا + ما = ص

$$\text{پس لا} - \text{لا} = \text{ما} - \text{ما} \dots \dots \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے حملوں کو آپس میں ضرب دے تو

$$(\text{لا} - \text{لا})(\text{لا} + \text{لا}) = (\text{ما} - \text{ما})(\text{ما} + \text{ما}) \dots \dots \dots (۳)$$

اب لا، ما کو دایرہ پر لا، ما کے قریب تر ہٹاتے جاؤ یہاں تک کہ وہ بالآخر لا، ما سے منطبق ہو جائے۔

تب اس انتہائی وضع میں دو نقطہ لا، ما پر کا خط مماس بن جاتا ہے پس مساوات (۳) میں لا = لا اور ما = ما لکھنے سے نقطہ لا، ما پر کے مماس کی مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ یعنی

$$(\text{لا} - \text{لا})(\text{لا} + \text{لا}) = (\text{ما} - \text{ما})(\text{ما} + \text{ما})$$

$$\text{یا لا} + \text{لا} = \text{ما} + \text{ما} = ص$$

اگر دائرہ کی مساوات لا + ما + گ لا + ف + ج = ۰ مانی جائے  
تو پہلے کی طرح لا، ما اور لا، م نقطوں میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

$$\frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما} \dots \dots \dots (۱) \text{ ہوگی}$$

اور چونکہ یہ نقطے دائرہ پر ہیں لہذا لا + ما + گ لا + ف + ج = ۰  
لا + ما + گ لا + ف + ج = ۰

∴ (لا - لا) (لا + لا + ما + گ) = (ما - ما) (ما + ما + ف + ج) ..... (۲)  
(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے جلوں کو باہد یکسر ضرب

دینے سے قاطع کی مساوات  
(لا - لا) (لا + لا + ما + گ) = (ما - ما) (ما + ما + ف + ج)  
برآمد ہوتی ہے۔

پس نقطہ لا، ما پر کے خط مماس کی مساوات (لا - لا) (لا + گ)  
+ (ما - ما) (ما + ف) = ۰ ہے

یعنی لا لا + ما + ما + گ لا + ف + ما + لا + گ لا + ف + ج اضافہ کرو۔  
اب مساوات کے دونوں جانب گ لا + ف + ج اضافہ کرو۔

چونکہ لا، ما دائرہ پر واقع ہے لہذا مماس کی مساوات  
لا + ما + گ لا + لا + ف + ج = ۰ ہو جاتی ہے جس سے واضح ہے کہ

دائرہ کے کسی نقطہ لا، ما پر کے خط مماس کی مساوات دائرہ کی مساوات  
میں لا کے عوض لا لا، ما کے عوض ما + لا کے عوض (لا + لا) اور  
ما کے عوض (ما + ما) لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲) دائرہ کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات۔ فرض کرو

دائرہ لا + ما = ص پر نقطہ لا، ما واقع ہے۔ اس نقطہ پر کے خط مماس کی  
مساوات لا لا + ما + ما = ص ہے اور جو کوئی خط اس مماس کے علی التوا کم  
ہو گا اس کی مساوات = ما - لا - لا + ما = ۰ جس میں ص مستقل ہے۔

جب نقطہ لا، ما، اس خط پر واقع ہوتا ہے تو

$$\text{لا} - \text{لا} = \text{لا} + \text{ما} = \text{ما} = \text{لینے ص} = ۰$$

پس دائرہ کے نقطہ لا، ما پر کے عمود کی مساوات لا - لا = لا + ما = ۰ ہے  
اس مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرہ کا عمود مبداء میں سے گزرتا ہے  
یعنی مرکز میں سے۔

(ج) ایک دیے ہوئے خط مستقیم اور دائرہ کے تقاطع  
کے نقطوں کی تعین۔

دائرہ کی مساوات لا<sup>۱</sup> + ما<sup>۱</sup> = ص<sup>۱</sup> مانو اور خط مستقیم کی مساوات  
ما = ص لا + ج جو نقطے خط مستقیم اور دائرہ کے مشترک ہو گئے ان کے لیے یہ  
دونوں مساواتیں صادق آئیں گی۔ پس چونکہ خط مستقیم کی مساوات  
ما<sup>۱</sup> = (ص لا + ج) اتنی جاسکتی ہے لہذا ان مشترک نقطوں کے لیے  
ما<sup>۱</sup> = (ص لا + ج) = ص<sup>۱</sup> - لا<sup>۱</sup>

یعنی لا<sup>۱</sup> (۱ + ص) + ۲ ص ج لا + ج<sup>۲</sup> - ص<sup>۲</sup> = ۰ ..... (۱)  
یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو صلیں، حقیقی اور مختلف حقیقی اور  
مساوی یا خیالی ہوں گی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہوں گی اور ان کو مساوات ما = ص لا + ج میں  
یہ قیمتیں درج کرنے سے ما کی بھی دو قیمتیں برآمد ہوں گی۔ اس لیے ہر خط مستقیم  
دائرہ سے دو حقیقی اور امتیاز پذیر نقطوں میں یا دو منطبق نقطوں میں یا دو  
خیالی نقطوں میں ملتا ہے۔ خیالی نقطوں سے مراد وہ نقطے ہیں جن کے محدود  
خیالی ہیں۔

مساوات (۱) کی صلیں باہدیک مساوی ہوں گی اگر

$$(۱ + ص) (رج - ص) = ص ج$$

یعنی اگر ج<sup>۲</sup> = ص<sup>۲</sup> (۱ + ص)  
جب لا کی دو قیمتیں مساوی ہوں گی تو ما کی دو قیمتیں بھی باہدیک

مساوی ہوگی۔

پس  $\text{پہ خط} = \text{مر لا} + \text{ج}$  اور  $\text{دائرہ لا} + \text{ما} = \text{ص}^۱$  کے تقاطع کے نقطے منطبق ہونگے اگر  $\text{ج} = \text{ص}^۱$  (۱+ مر)۔ پس خط مستقیم  $\text{ما} = \text{مر لا} + \text{ص}^۱$   $\text{ما} + \text{مر}$  دائرہ لا +  $\text{ما} = \text{ص}^۱$  کو مرکز کی علامتیں کے لیے مس کرے گا۔

چونکہ  $\text{ما} + \text{مر}$  کی علامت مثبت یا منفی مانی جاسکتی ہے اس لیے مرکز ہر مثبت کے لیے دائرہ کے دو خطوط  $\text{ما}$   $\text{ص}$  ہونگے یعنی کسی دے ہوئے خط مستقیم کے متوازی دائرہ کے دو ماسی خط ہوتے ہیں۔

(۵) دائرہ کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کے طریق کی تعیین۔

مرکز دائرہ کو مبداء اور محور و لا کو وتروں کا متوازی مانو۔ تب دائرہ کی مساوات  $\text{لا} + \text{ما} = \text{ص}^۱$  ہوگی اور وتروں کے نظام میں سے کسی ایک وتر کی مساوات  $\text{ما} - \text{ج} =$  لی جاسکتی ہے جہاں یہ دونوں ملینگے وہاں  $\text{لا} + \text{ج} = \text{ص}^۱$   $\therefore \text{لا} = \pm \text{ما} - \text{ج}$

چونکہ لا کی یہ دونوں قیمتیں مساوی اور مخالف ہیں اس لیے یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ وتر کے وسطی نقطہ کا فاصلہ یا مقطوعہ صفر ہوتا ہے یعنی یہ وسطی نقطہ ہمیشہ محور و ماب پر واقع ہوتا ہے۔ ج کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر  $\text{ج} = \text{ص}^۱$  تو لا کی دونوں قیمتیں خیالی ہوتی ہیں لیکن برہمسمان کا حاصل جمع صفر ہی ہوتا ہے۔ اور اس لیے وتر کا وسطی نقطہ اس صورت میں بھی  $\text{ما}$  کے محور پر واقع ہوتا ہے۔

پس دائرہ کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مرکز سے ان پر علی القواثم کھینچا جاتا ہے۔ یہ ضروری نہیں کہ اس طریق کو صرف اس کے اس جز تک محدود سمجھیں جو دائرہ کے اندر واقع ہے۔ دہا، اب تک صرف دائرہ کی عام تعریف کو (یعنی یہ کہ اس کے مرکز سے اس کے محیط کے کسی بھی نقطہ کا فاصلہ مستقل ہے) مان کر نتائج حاصل

کیے گئے۔ اس کی کسی ہندسی خاصیت سے مدد نہیں لی گئی۔ اگر ان سے استفادہ کیا جائے تو بعض نتائج زیادہ آسانی کے ساتھ برآ مدہ ہو سکتے ہیں۔ مثلاً دائرہ پر کسی نقطہ کے خط مماس کی مساوات کے لیے دائرہ کی اس خاصیت سے مدد لی جاسکتی ہے کہ وہ اس نقطہ کو مرکز سے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔ چنانچہ آخر الذکر خط کی مساوات  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  ہے۔ جس میں  $\frac{y}{x}$  دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد ہیں۔ اور اس کے علی القوائم خط کی مساوات جو  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  میں سے گزرتا ہے  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2 + b^2}$  ہے۔

ایک دوسری مثال کے طور پر یہ معلوم کرنے کے لئے کہ خط  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2 + b^2}$  دائرہ  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  کو کسی شرط کے تحت مس کرے گا۔ ہم دائرہ کی اس ہندسی خاصیت کو کام میں لاسکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دیے ہوئے خط کا فاصلہ مرکز سے لفظ نظر کے مساوی ہوتا ہے۔

پس شرط یہ ہے کہ  $\pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  فاصلہ  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  کے مساوی ہو یعنی

$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{b}{a}$  کسی بھی نقطہ سے دائرہ کے دو خط مماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی ہونگے اگر نقطہ دائرہ کے باہر ہوگا، منطبق اگر نقطہ دائرہ پر ہوگا اور خیالی اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہوگا۔

دائرہ کی مساوات  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  میں  $\frac{y}{x}$  کو کسی بھی نقطہ کے محدد اور یہ فرض کر دو۔ اگر  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  دائرہ پر کے کسی بھی نقطہ کے محدد مانے جائیں تو اس نقطہ پر کے مماس کی مساوات

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2 + b^2}$$

یہ خط مماس نقطہ (ع، ب) میں سے گزرے گا اگر  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2 + b^2}$  میں  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  ..... (۱)  
چونکہ  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  دائرہ پر واقع ہے اس لیے  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a^2 + b^2}$  میں  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  ..... (۲)

پس ان دو مساواتوں سے دائرہ کے ان نقطوں کے لیے لا، اور ما

کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں جن پر کے تماس دیے ہوئے نقطہ (عہ، بہ) میں سے گزرتے ہیں۔ مساوات (۲) میں ما کے عوض ص<sup>۲</sup> - عہ لا، لکھو تو

$$\text{لا}^2 (\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2) - ۲ \text{ص}^2 \text{عہ لا} + \text{ص}^2 (\text{ص}^2 - \text{بہ}^2) = ۰ \dots (۳)$$

اس سے ان نقطوں کے فضلے معلوم ہو جاتے ہیں۔ چونکہ مساوات (۳)

دو درجی ہے اس لیے دائرہ کے دو تماس نقطہ (عہ، بہ) میں سے

گزرینگے۔

مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطقی یا خیالی ہونگی بہ لحاظ اس کے کہ

$$\text{ص}^2 \text{عہ}^2 - \text{ص}^2 (\text{ص}^2 - \text{بہ}^2) (\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2) \text{ صفر سے زائد، اس کے}$$

مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ یعنی بہ لحاظ اس کے کہ عہ<sup>۲</sup> + بہ<sup>۲</sup> - ص<sup>۲</sup> صفر سے

زائد، اس کے مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ جس کے سننے یہ ہوتے کہ نقطہ (عہ، بہ)

دائرہ کے باہر ہے، اس پر ہے یا اس کے اندر ہے۔

(و) کسی نقطہ سے دائرہ پر خطوط تماس کھینچے جاتے ہیں،

ان کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات۔

جس نقطہ سے خطوط تماس کھینچے جاتے ہیں اس کے محدود لا، ما

فرض کرو۔ تماس کے نقطوں کے محدود کو عہ، بہ، اور عہم، بہم، مالو اور

دائرہ کی مساوات لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> = ص<sup>۲</sup> فرض کرو۔

خطوط تماس کی مساواتیں لا عہ + ما بہ = ص<sup>۲</sup> اور لا عہم + ما بہم = ص<sup>۲</sup> ہونگی۔

چونکہ یہ دونوں خطوط تماس نقطہ لا، ما میں سے گزرتے ہیں اس لیے

ان کی مساواتیں ان محدودوں کے لیے بھی صحیح ہونگی۔

$$\therefore \text{لا عہ} + \text{ما بہ} = \text{ص}^2 \dots (۱) \text{ اور لا عہم} + \text{ما بہم} = \text{ص}^2 \dots (۲)$$

لیکن (۱) اور (۲) مساواتیں اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں



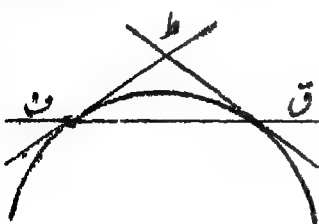
(عم، بیہ) اور (عم، بیہ) محدود والے نقطے ایسے خط مستقیم پر واقع ہو سکتے ہیں جس کی مسادات

لا لا + ما + ص = ص ..... (۳) ہے  
پس مسادات (۳) ایسے خط مستقیم کی مسادات ہے جو نقطہ لا، ما، ص  
دائرہ پر کھینچے ہوئے خطوط مماس کے تماس کے دونوں نقطوں میں سے گزرتا ہے۔  
اگر دائرہ کی مسادات لا + ما + ص + گ + لا + ف + ج = ج لی جائے  
تو مصرعہ بالا طریقہ پر بتایا جاسکتا ہے کہ لا، ما، نقطہ سے کھینچے ہوئے خطوط  
مماس کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مسادات  
لا لا + ما + گ (لا + لا) + ف (ما + ما) + ج = ج ہے۔

جب نقطہ لا، ما، دائرہ کے باہر ہوتا ہے تو دونوں خطوط مماس  
حقیقی ہوتے ہیں اور محدود عم، بیہ اور عم، بیہ حقیقی۔ اور جب لا، ما، دائرہ  
کے اندر ہوتا ہے تو دونوں خطوط مماس خیالی ہوتے ہیں لیکن اس صورت  
میں بھی وہ خط مماس کی تعبیر مسادات (۳) سے ہوتی ہے ایک حقیقی خط ہوتا ہے  
بشرطیکہ لا، اور ما حقیقی ہوں۔ پس ایک حقیقی خط دائرہ کے اندر کے کسی  
نقطہ سے دایرہ پر کھینچے ہوئے خیالی خطوط مماس کے خیالی نقاط تماس  
کو ملاتا ہے۔

### دائرہ کے لحاظ سے قطب اور قطبی کی تعریف کسی نقطہ سے ایک

دائرہ پر جو حقیقی یا خیالی خطوط مماس کھینچے جاسکتے ہیں ان کے تماس کے نقطوں  
میں سے گزرنے والے خط مستقیم اس نقطہ کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطبی کہلاتا ہے۔



شکل ۲۱

کسی خط مستقیم اور ایک دائرہ کے حقیقی یا خیالی  
نقاط تقاطع پر کے خطوط مماس کے تقاطع کا نقطہ اس  
خط مستقیم کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطب کہلاتا ہے۔  
مثلاً شکل ۲۱ میں نقطہ ط دیے  
ہوئے دائرہ کے لحاظ سے خط ف ق

کا قطب ہے۔ اور خط ف ق دائرہ کے محاط سے نقطہ ط کا قطبی ہے۔ جب نقطہ ق دائرہ پر حرکت کرتا ہوا ف کی طرف کو جاتا اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے تو واضح ہے کہ خط ط ماس ط ف اور ط ق بھی بالآخر ایک دوسرے کے ساتھ اور وتر ف ق سے منطبق ہو جاتے ہیں۔ اس کے یہ معنی ہوں گے کہ جب نقطہ ط دائرہ پر واقع ہوتا ہے تو ط کا قطبی ط پر کے خط ط ماس کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔ قطبی کی مساوات چونکہ خط ماس کی مساوات کی ہم شکل ہے اس لیے تحلیلی نقطہ نظر سے بھی یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ دائرہ پر کے نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا خط ماس ہے۔

(۲) اگر کسی نقطہ ف کا قطبی کسی دوسرے نقطہ ق میں سے گزرے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرے گا۔

فرض کرو ف کے محدود لاء ما ہیں اور ق کے محدود لاء ما اور دائرہ کی مساوات لاء ما = ص ہے تب ف اور ق کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب -

لا لا + ما ما - ص = ۰ ..... (۱) اور لا لا + ما ما - ص = ۰ ..... (۲)

ہیں۔

اگر نقطہ ق نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہو تو مساوات (۱) محدودوں لاء ما کے ساتھ بھی درست ہوگی۔ یعنی لا لا + ما ما - ص = ۰۔

نقطہ ف نقطہ ق کے قطبی پر واقع ہو تو اس صورت میں بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ف کا قطبی جب ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔

اگر ایک نقطہ ق کسی ثابت خط مستقیم پر واقع ہے اور ف اس خط کا قطب ہے۔ تب ق کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے اس لیے کہ محور میں مان لیا گیا ہے کہ ق کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے۔ اس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور نقطہ ق اس خط کا قطب ہو تو چونکہ ق کے قطبی پر واقع ہے ق ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہونا چاہیے جو ف کا قطبی ہو۔ لہذا دو نقطوں ق، ف کے قطبی نقطہ سر پر ملتے ہیں

تو اس خط مستقیم ف ق کا قطب بھی گا۔ چونکہ اس نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہے اس لیے اس کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح اس کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے پس واضح ہے کہ اس کا قطبی خط مستقیم ف ق ہونا چاہیے۔

(ح) کسی دیے ہوئے نقطہ کے دائرہ کے مماس سے قطبی کا بندسی عمل۔

دائرہ کی مساوات  $۱۰۰ + ۱۰۰ = ۲۰۰$  ما ۲ اور فرض کرو کہ ف کوئی سا نقطہ ہے جس کے محدود لا، ما ہیں۔ اس نقطہ کے قطبی بلحاظ دائرہ کی مساوات  $۱۰۰ + ۱۰۰ = ۲۰۰$  ما ۲ کو مرکز دائرہ سے ملانے والے خط مستقیم کی مساوات  $۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰$  ہے۔

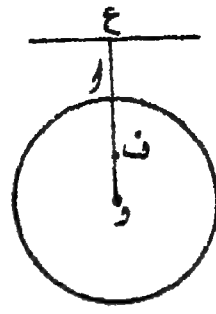
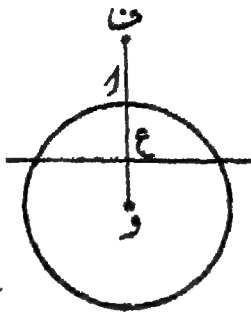
ان دونوں مساواتوں پر غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ یہ باہم دیگر علی القوائم خطوط کی مساواتیں ہیں۔ پس کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ دائرہ اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔ شکل ۲۲ میں اگر د و سے اس کے قطبی پر عمود ہے

$$\frac{۲۰۰}{۱۰۰ + ۱۰۰} = ۱$$

$$\overline{MA}^2 + \overline{MA'}^2 = \overline{OA}^2$$

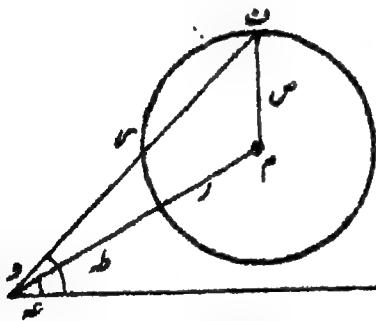
$$\therefore \text{وع} \times \text{وف} = \text{مس}^2$$

پس ف کا قطبی  
بلحاظ دائرہ کھینچنے کے لیے  
وف کو ملاؤ اور اس کو دائرہ  
کو نقطہ ا پر قطع کرنے دو۔  
پھر خط وف پر ایک ایسا  
نقطہ ع لو کہ



شکل ۲۲

وف : و ا :: و ا : و ع (یعنی ف کا بلحاظ دائرہ معکوس نقطہ دریافت کرو)۔  
ع میں سے وف کے علی المقوائم خط مستقیم کھینچو۔ یہ خط نقطہ ف کا قطبی ہوگا۔  
(ط) دائرہ کی قطبی مساوات۔ فرض کرو م دائرہ کا مرکز ہے۔



شکل ۲۳

م کے قطبی محدودوں کو ر اور عہ  
ملاؤ۔ دائرہ پر کوئی سا نقطہ ف  
لے کر اس کے قطبی محدودوں کو س اور  
طہ فرض کرو۔

تب ازروئے ہندسہ

$$\begin{aligned} \text{م ف}^2 &= \text{وم}^2 + \text{وف}^2 - 2 \text{وم} \times \text{وف} \cos \text{م ف} \\ \text{چونکہ م ف} &= \text{مس}^2 \text{، و م} = \text{ر}^2 \text{، و ف} = \text{س}^2 \text{، زاویہ کا د م} = \text{عہ اور} \\ \text{زاویہ کا و ف} &= \text{طہ} \\ \text{لہذا ص}^2 &= \text{ر}^2 + \text{س}^2 - 2 \text{ر س} \cos (\text{طہ} - \text{عہ}) \dots (۱) \end{aligned}$$

یہی دائرہ کی قطبی مساوات ہے۔

اگر مبداء دائرہ کے محیط پر ہو تو سر = ۲ ص جم (طہ۔ عد) ..... (۲)  
اگر علاوہ بریں حوالہ کا خط مستقیم ولا مرکز میں سے گزرتا ہے  
تو عد = صفر اور دائرہ کی مساوات

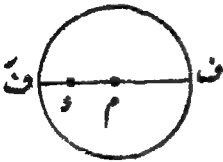
سر = ۲ ص جم طہ ..... (۳)  
مساوات (۱) کو بشکل سر - ۲ ص جم طہ + ۲ ص = برتیب  
یہ سرا کی دو درجی مساوات ہے۔ اگر سرا، اس کی اسیلیں قرار  
دی جائیں تو

سرا، سر = ۲ ص ..... (۴)  
پس حاصل ضرب سرا، سر زاویہ طہ کے غیر تابع ہے جس سے  
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی ثابت نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچا جائے جو  
کسی دیے ہوئے دائرہ کو قطع کرتا ہے تو اس خط کے قطعہات کا حاصل ضرب  
مستقل ہے۔

اگر مبداء و دائرہ کے اندر واقع ہو تو ر نصف قطر ص سے  
جھوٹا ہوتا ہے۔ پس سرا، سر کی علامتیں مختلف ہونی چاہئیں یعنی مبداء  
سے ایک دوسرے کے مخالف سمتوں میں کھینچی گئی ہوگی جیسا کہ شکل  
سے واضح ہے۔

$$وف = ص + ر، وف = - (ص - ر)$$

$$وف \times وف = (ص - ر) (ص + ر)$$



شکل ۲۴

(دی) قائم متقاطع دائرے۔

$$لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف م + ج =$$

$$لا + ما + ۲ گ لا + ۲ ف م + ج =$$

دو دائروں کے باہر یکسر علی القوائم متقاطع ہونکی شرط کی تعیین

ان دائروں کے مرکز علی الترتیب (گ<sup>۱</sup> - ف<sup>۱</sup>) اور (گ<sup>۲</sup> - ف<sup>۲</sup>) نقطے ہیں۔ اور ان کے نصف قطروں کے مربع گ<sup>۱</sup> + ف<sup>۱</sup> - ج<sup>۱</sup> اور گ<sup>۲</sup> + ف<sup>۲</sup> - ج<sup>۲</sup> ہیں۔ یہ ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کر سیکے اگر ان کے مرکزوں کے درمیان فی فاصلہ کا مربع ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو گا۔

پس شرط مذکور یہ ہے کہ (گ<sup>۱</sup> - گ<sup>۲</sup>) + (ف<sup>۱</sup> - ف<sup>۲</sup>) = ج<sup>۱</sup> + ج<sup>۲</sup> - ف<sup>۱</sup> - ف<sup>۲</sup> + گ<sup>۱</sup> + گ<sup>۲</sup> - ج<sup>۱</sup> - ج<sup>۲</sup>

یعنی ۲گ<sup>۱</sup>گ<sup>۲</sup> + ۲ف<sup>۱</sup>ف<sup>۲</sup> - ج<sup>۱</sup>ج<sup>۲</sup> = ۰ [ظہر لبق دیکھو۔ چونکہ کسی مشترک نقطہ (لا<sup>۱</sup> لا<sup>۲</sup>) پر کے خطوط مماس حسب ذیل ہیں۔

لا<sup>۱</sup> لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۱</sup> + ما<sup>۲</sup> + گ<sup>۱</sup> (لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup>) + ف<sup>۱</sup> (ما<sup>۱</sup> + ما<sup>۲</sup>) + ج<sup>۱</sup> = ۰

لا<sup>۱</sup> لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۱</sup> + ما<sup>۲</sup> + گ<sup>۲</sup> (لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup>) + ف<sup>۲</sup> (ما<sup>۱</sup> + ما<sup>۲</sup>) + ج<sup>۲</sup> = ۰

یہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اگر (لا<sup>۱</sup> + گ<sup>۱</sup>) (لا<sup>۲</sup> + گ<sup>۲</sup>) + (ما<sup>۱</sup> + ف<sup>۱</sup>) (ما<sup>۲</sup> + ف<sup>۲</sup>) = ۰

یعنی لا<sup>۱</sup> + ما<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + گ<sup>۱</sup> + (ما<sup>۱</sup> + ف<sup>۱</sup>) (ما<sup>۲</sup> + ف<sup>۲</sup>) + گ<sup>۲</sup> = ۰

ف<sup>۱</sup> ف<sup>۲</sup> = ۰ ..... (۱)

لیکن چونکہ (لا<sup>۱</sup> لا<sup>۲</sup>) دونوں دائروں پر ہے اس لیے

لا<sup>۱</sup> + ما<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + گ<sup>۲</sup> + لا<sup>۱</sup> + ف<sup>۲</sup> ما<sup>۱</sup> + ج<sup>۲</sup> = ۰ ..... (۲)

اور لا<sup>۱</sup> + ما<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + گ<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + ف<sup>۱</sup> ما<sup>۲</sup> + ج<sup>۱</sup> = ۰ ..... (۳)

مساوات (۱) کو ۳ سے ضرب دے کر اس میں سے (۲) اور (۳) مساواتوں کے حاصل جمع کو خارج کر دو تب

۲گ<sup>۱</sup>گ<sup>۲</sup> + ۲ف<sup>۱</sup>ف<sup>۲</sup> - ج<sup>۱</sup>ج<sup>۲</sup> = ۰

رگ کسی دیے ہوئے نقطہ سے ایک دائرہ پر کھینچے ہوئے  
خط مماس کے طول کی تعیین۔

اگر دیا ہوا نقطہ ط ہے اور اس سے م مرکز والے دائرہ پر کھینچے ہوئے  
دو خطوط مماس میں سے ط ت ایک خط مماس ہے تو ہندسہ کی رو سے ظاہر  
ہے کہ زاویہ م ت ط ایک زاویہ قائمہ ہے۔ پس

ط ت = م ط - م ت ..... (۱)  
دائرہ کی مساوات فرض کرو (لا - ع) + (ما - ب) = ص ..... (۲)  
اگر ط کے محدود لا، ما ہیں تو م ط = (لا - ع) + (ما - ب) ..... (۳)  
پس مساوات (۱) سے  
یعنی (لا، ما) سے کھینچے ہوئے مماس کا طول، مساوات (۲) میں لا، ما  
کے عوض لا، ما لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

پس اگر دائرہ کی مساوات لا + ما + مگ + لا + م ف + ا + ج = .....  
فرض کی جائے اور اس میں کسی دئے ہوئے نقطہ کے محدود درج کیے جائیں تو مساوات  
کی سیدھی طرف کا جملہ اس نقطہ سے دائرہ پر کھینچے ہوئے خط مماس کے  
طول کے مربع کے مساوی ہو گا۔ اور چونکہ یہ مربع اس نقطہ سے دائرہ کو قطع  
کرنے والے خطوط کے قطعات کے حاصل ضرب کے مساوی ہے اس لیے جملہ  
مذکورہ سے اس حاصل ضرب کی قیمت بھی معلوم ہو جائیگی۔ جب نقطہ دائرہ  
کے اندر ہو گا تو واضح ہے کہ یہ حاصل ضرب اور مماس کا طول خیالی ہونگے۔  
اگر دائرہ کی مساوات لا + ما + مگ + لا + م ف + ا + ج = ..... ہو تو اس کو  
درج پر تقسیم کر کے اس میں دیے ہوئے نقطہ کے محدود درج کرنے سے اس نقطہ  
سے کھینچے ہوئے خط مماس کے طول کا مربع حاصل ہو گا۔

مثال۔ دائرہ لا + ما + مگ + لا + م ف + ا + ج = ..... سے کھینچے ہوئے





دائرہ پر کھینچے ہوئے دو حواسوں میں سے کسی ایک حواس پر واقع ہوگا اس کی مساوات  $(لا^۲ + ما^۲ - ص^۲) = (لا^۲ + با^۲ - ص^۲)$ ۔  $(لا^۲ + لا^۲ + ما^۲ - ص^۲) = ۰$  ہے لہذا لا با سے دائرہ پر کھینچے ہوئے دو حواسوں کی مساوات یہی ہے۔

### (د) دو دائروں کا بنیادی محور۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب  $لا^۲ + ما^۲ + گم^۲ + لا^۲ + فم^۲ = ۰$

$$+ ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

اور  $لا^۲ + ما^۲ + گم^۲ + لا^۲ + فم^۲ + ج = ۰ \dots \dots \dots (۲)$  ہیں۔

تو واضح ہے کہ کسی ایسے نقطہ کے محدود جو مساوات (۱) اور نیز مساوات

(۲) کے دائروں پر واقع ہو مساوات  $لا^۲ + ما^۲ + گم^۲ + لا^۲ + فم^۲ + ج = ۰$

$= لا^۲ + ما^۲ + گم^۲ + لا^۲ + فم^۲ + ج$  کی تقدیر کرنیکے۔

پس مساوات (۳) ایک ایسے طریق کو تعبیر کرتی ہے جو دیے ہوئے

دو دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ یہ مساوات

$$۲(گم - گم) + لا^۲ + (فم - فم) + ما^۲ + ج - ج = ۰ \dots \dots \dots (۴)$$

میں تحویل ہوتی ہے جو پہلے درجہ کی ہونے کی وجہ سے ایک خط مستقیم

کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ دو دائرے اگر حقیقی نقطوں میں ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو

بھی مساوات مندرجہ بالا سے جس خط مستقیم کی تعبیر ہوتی ہے وہ ہر صورت میں

حقیقی ہے بشرطیکہ  $گم$ ،  $فم$ ،  $ج$  اور  $گم$ ،  $فم$ ،  $ج$  حقیقی ہوں۔

مساوات (۳) کی ایک اور بھی تعبیر ہو سکتی ہے۔

کسی دائرہ مساوات (۱) میں جس میں لا کا سر اکائی ہے اگر لا، ما کی

جگہ کسی ایک نقطہ کے محدود درجہ کیے جائیں تو اس کی سیدھی جانب کا جملہ

اس حواس کے مربع کے مساوی ہے جو اس نقطہ سے دائرہ تک کھینچے جاتے

ہیں۔ پس اگر لا، ما خط مساوات (۳) پر کے کسی بھی نقطہ کے محدود ہوں تو

اس مساوات کی سیدھی جانب کا جملہ اس نقطہ سے دائرہ (۱) تک

کھینچے ہوئے خط مماس کے مربع کے مساوی ہوگا اور اس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ اس نقطہ سے دائرہ (۲) تک کھینچے ہوئے خط مماس کے مربع کے مساوی ہوگا۔

پس خط مساوات (۳) کے کسی نقطہ سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماس باہر گیر مساوی ہیں۔

تعریف۔ ایسے خط کو جی دو دائروں کے حقیقی یا خیالی نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے ان دائروں کا بنیادی محی کہتے ہیں۔

بنیادی محور کی اس طرح بھی تعریف ہو سکتی ہے کہ وہ ان نقطوں کا طریقہ جن سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماسوں کا طول مساوی ہو جو نیک مساوات (۱) اور (۲) کے دائروں کے مرکوزوں کے محدود علی الترتیب (گ-۱-ف) اور (گ-۲-ف) ہیں

ان کو ملانے والے خط کی مساوات  $\frac{لا+گ-۱}{ف-۱-گ} = \frac{ما+ف-۲}{ف-۲-گ}$  ہے جو بنیادی محور (مساوات ۴) کے علی القوائم ہے۔

(۴) تین دائروں کے تینوں بنیادی محوروں کے ایک ایک جفت کے لحاظ سے پھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

$$۱. لا+۲+ما+۲گ-لا+۲ف+ما+ج=۰$$

$$۰. لا+۲+ما+۲گ-لا+۲ف+ما+ج=۰$$

$$۰. لا+۲+ما+۲گ-لا+۲ف+ما+ج=۰$$

تین دائروں کی مساواتیں ہیں تو پہلے اور دوسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات  $لا+۲+ما+۲گ-لا+۲ف+ما+ج=۰$  (۱) اور  $لا+۲+ما+۲گ-لا+۲ف+ما+ج=۰$  (۲) ہے۔

اسی طرح پہلے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج - (لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج) = ۰$$

اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج - (لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج) = ۰$$

ان سے واضح ہے کہ کسی نقطہ کے محدود اگر ان تین مساواتوں میں سے

کسی دو کے لیے صحیح ہونگے تو وہ باقی ماندہ تیسری مساوات کے لیے بھی صحیح ہونگے۔

ان تین بنیادی محوروں کے تقاطع کے نقطہ کو ان تین دائروں کا بنیادی مراکز کہتے ہیں۔

(ن) دائروں کے کسی نظام کی مساوات۔

اگر مساوات  $لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$  میں ایک یا اس سے زیادہ سروں کے اندر کوئی اختیاری مستقل شامل ہو تو وہ مساوات دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرے گی۔ مثلاً  $لا + ما + ج = ۰$  میں اگر  $ص$  ایک اختیاری مستقل ہے تو مساوات مذکور ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہے جن کے مرکز مبدأ پر واقع ہیں۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب  $لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$  (۱)

اور  $لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$  (۲) ہوں تو

مساوات  $لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$  (۳) اور (۲) کا طریق ہمیشہ ایک دائرہ ہوتا ہے (۱)

$لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$  (۳) اور (۳) کا طریق ہمیشہ ایک دائرہ ہوتا ہے (۱)

۲۔ صورت میں کہ جب  $ص = ۱$  جیسا کہ پہلے بیان ہو چکا ہے  $ص = ۱$  کی صورت میں مساوات مذکور ایک خط مستقیم لینے دیے ہوئے دائروں کے بنیادی محور کو تعبیر کرتی ہے۔

مساوات (۱) کو ترتیب دینے سے  $(۱+ص) لا + (۱+ص) ما$   
 $۲ + (گم + مرگم) + ۲ + (فم + مر فم) + (ج + مر ج) = ۰$  کی  
 $(۱+ص)$  پر تقسیم کرنے سے  $لا + ما + ۲ + (گم + مرگم) + ۲ + (فم + مر فم) = ۰$

$ج + مر ج + ۱ + ص = ۰$  جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔  
 دائرہ مساوات (۳) کے مرکز کے محور  $(گم + مرگم) + ۱ + ص$  اور  $(فم + مر فم) + ۱ + ص$

غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ جو نقطہ دائرہ (۱) اور دائرہ (۲) کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو  $ص$  کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اس کے بھی یہی محور ہیں۔

[جب دائرے  $لا + ما + ۲ + (گم + مرگم) + ۲ + (فم + مر فم) + ۱ + ص = ۰$  اور  $لا + ما + ۲ + (گم + مرگم) + ۲ + (فم + مر فم) + ۱ + ص = ۰$  دو نقطوں  $فم$  میں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو باسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دائروں کا وہ نظام جس کی مساوات  $لا + ما + ۲ + (گم + مرگم) + ۲ + (فم + مر فم) + ۱ + ص = ۰$  ہے ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جو  $فم$  اور  $فم$  نقطوں میں سے گزرتے ہیں]

ہم محور دائرے۔ اگر دو دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط

لا کا محور مانا جائے اور بنیادی محور ما کا محور تو مساوات (۳) یہ شکل  
 $لا + ما + ۱ + ص = ۰$  لکھی جاسکتی ہے جس میں  $ص$  ایک اختیاری مستقل ہے۔  
 محور خواہ کیسے ہی منتخب ہوں  $لا + ما + ۲ + (گم + مرگم) + ۲ + (فم + مر فم) + ۱ + ص = ۰$   
 اور  $لا + ما + ۲ + (گم + مرگم) + ۲ + (فم + مر فم) + ۱ + ص = ۰$

ان دائروں کی عام مساواتیں ہونگی۔ اگر ان کے مرکز محور کا واقع ہو  
 تو  $\text{توف} = \text{اورف}$ ۔ تب بنیادی محور کی مساوات  $۲(\text{گم} - \text{گم})$  لا  
 $+$   $(\text{ج} - \text{ج})$  ہو جاتی ہے۔ منطبق ہوتا ہے تو چونکہ اس محور کی مساوات  
 اگر یہ خط محور سے منطبق ہوتا ہے تو چونکہ اس محور کی مساوات  
 لا = ہے لہذا  $\text{ج} - \text{ج}$  صفر کے مساوی ہونا چاہیے یعنی  $\text{ج} = \text{ج}$  پس  
 $\text{ج}$  اور  $\text{ج}$  کے عوض  $\text{ج}$  لکھنے اور  $\text{ف} = \text{اورف}$ ۔ لکھنے سے مساوات  
 (۳) بشکل

$$\text{لا} + \text{ما} + ۲\text{گم} + \text{لا} + \text{ج} + \text{مر}(\text{لا} + \text{ما} + ۲\text{گم} + \text{لا} + \text{ج}) =$$

تبدیل ہوتی ہے

$$\text{لا} + \text{ما} + ۲(\text{گم} + \text{مرگم}) + \text{لا} + \text{ج} =$$

چونکہ لا کا سرور کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے اس لیے اس کو مر سے  
 تعبیر کر سکتے ہیں پس ان دائروں کی مساوات  $\text{لا} + \text{ما} + \text{مر} + \text{لا} + \text{ج} =$   
 ہو جاتی ہے۔

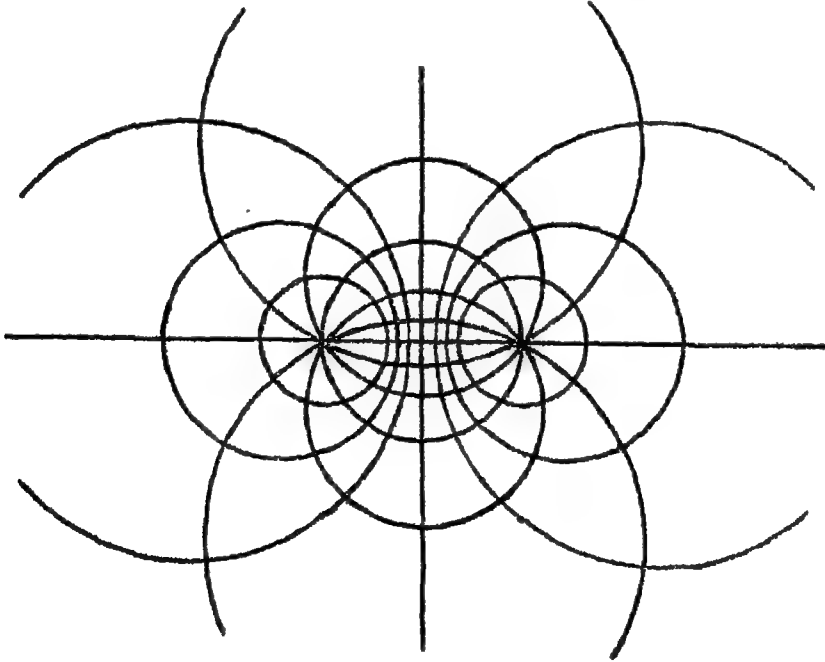
مر کو مختلف قیمتیں دینے سے یہ مساوات دائروں کے مختلف جوڑوں  
 کو بھی تعبیر کرتی ہے۔ ان تمام دائروں کے مرکز محور کا ہوتے ہیں۔ ان کے  
 مرکزوں کے محدود (مر) ہیں اور ان کے نصف قطر  $\text{مر} = \text{مر} - \text{ج}$   
 یہ امر کہ آیا یہ دائرے ایک دوسرے کو قطع کر سینگے، مس کرینگے  
 یا نہیں چھینگے مر اور ج کی قیمتوں پر موقوف ہے۔

(۱) اگر  $\text{مر} = \pm \text{ما} + \text{ج}$  تب  $\text{ص} =$ ۔ اور یہ دائرے نقطوں (ج) میں  
 میں تحویل ہو گئے۔ یہ نقطے ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے  
 کہلاتے ہیں۔

(۲) اگر ج منفی ہے تو یہ ہم محور دائرے حقیقی نقطوں (ج) میں  
 اور (ج) میں سے گزرتے ہیں اور ان کے انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔  
 (۳) اگر  $\text{ج} =$ ۔ تو یہ دائرے ایک دوسرے کو مبداء پر مس کرتے ہیں۔

(۴) اگر ج مثبت ہو تو یہ دائرے خود ایک دوسرے کو خیالی نقطوں میں منقطع کرتے ہیں۔ ان کے انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور یہ دائرے  $لا + ما = ج$  مساوات والے دائرہ پر علی القوائم ہوتے ہیں۔ (اس لیے کہ دو دائرے علی القوائم ہونے کی شرط  $گ + ب = ف + ج$  ہے۔)

(۵) علی القوائم دائروں کی شرط کا یہ صریح نتیجہ ہے کہ دو ہم محور دائروں کے نظام جن کی مساواتیں  $لا + ما + ب + گ = ج = ۰$  اور  $لا + ما + ب + ف = ج = ۰$  ہیں۔ جن میں ج کی قیمت جملہ دائروں کے لیے مساوی ہے ایسے دائروں پر مشتمل ہیں کہ ایک نظام کا کوئی سا دائرہ دوسرے نظام کے جملہ دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ اور ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے نقطاتی دائرے ہیں۔



(ع) دائرہ لا + ما + گا + لا + ف + ما + ج + مر (لا + ما + گا + لا + ف + ما + ج) = کے کسی نقطے سے دائروں لا + ما + گا + لا + ف + ما + ج = ... (ب) پر کھینچے

اور لا + ما + گا + لا + ف + ما + ج = ... (ب) پر کھینچے ہوئے مماثلوں کے مربعوں کی نسبت مستقل اور۔ مر کے مساوی ہے۔  
اول الذکر دائرہ پر کوئی سا نقطہ (لا، ما) فرض کرو۔ تب  
لا + ما + گا + لا + ف + ما + مر (لا + ما + گا + لا + ف + ما + ج) =

پس - مر = لا + ما + گا + لا + ف + ما + ج

اس کسر میں شمار کنندہ نقطہ لا + ما سے دائرہ (ا) پر کھینچے ہوئے  
مماس کے مربع کے مساوی ہے اور نسب نما اسی نقطہ سے دائرہ (ب) پر کھینچے ہوئے مماس کے مربع کے مساوی ہے۔

نتیجہ یہ ہے کہ کسی ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے  
دائروں پر کھینچے ہوئے خطوط مماس کے طولوں کی نسبت مستقل ہے،  
ایک ہم محور دائرہ ہے۔

(ف) اگر دو دو ایسے دائروں کے مرکز ہیں جن کے نصف قطر  
علی الترتیب ص، ص میں تو خط د و کو دا خلا اور خارجاً ص، ص  
کی نسبت میں تقسیم کرنے والے دو نقطے ان دو دائروں کی مشابہت کے  
مراکزا کہلاتے ہیں۔

مشابہت کے مراکزوں کے خواص پر ہندسی طریقہ ہی سے چھی  
طرح بحث ہو سکتی ہے۔ ان خواص میں سے سب سے زیادہ اہم حقیقت  
ہے: (۱) دو دائروں کے مشترک مماسوں میں سے دو دو مماس  
ان دائروں کی مشابہت کے ایک ایک مراکز میں سے گزرتے ہیں (۲) دو دائروں کی مشابہت کے  
ایک مرکز میں سے جو کوئی خط ان دائروں کو قطع کرتا ہو اگر تا پہ وہ ان سے متساویاً قطع ہوتا ہے۔

### سوالات (۷)

(۱) اگر کسی دائرہ کے سرورں (ب) کے محدود علی الترتیب لا، م اور لا، م ہوں تو دائرہ کی مسادات

(لا-لا) (لا-لا) + (لا-لا) (لا-لا) = ہوگی۔

[مثلاً] - دائرہ پر کوئی سا نقطہ ف (لا، م) اور (لا، م) سے ملانے والا خط محور کا کے ساتھ زاویہ مس' بنا تا ہے۔ اسی طرح ب کو ف

سے ملانے والا خط زاویہ مس' بنا تا ہے چنانچہ یہ دونوں خط

$$[ \frac{لا-لا}{لا-لا} + \frac{لا-لا}{لا-لا} = ۰ ]$$

(۲) ثابت کرو کہ نقطوں (۱، ۰)، (۰، ۱) اور (ب، ب) میں سے گزرنے

والے دائرہ کی مسادات لا + م +  $\frac{لا-لا}{ب-ب}$  = ۰ ہے۔

(۳) ایسے دائرہ کی مسادات دریافت کرو

(۱) جو نقطوں (۲، ۲) اور (۲، ۲) میں سے گزرتا ہے اور مرکز محور ما پر رکھتا ہے۔

(ب) جس کا مرکز (۱، ۱) ہے اور جو محور لا پر عماس ہے۔

(ج) جو خطوط مستقیم لا = ۰، لا + م = ۰ اور لا = م = ۸ سے بنے ہوئے مثلث کا حائط دائرہ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر ص کی قیمتیں + م سے بڑی اور - م سے

چھوٹی ہوں تو مسادات لا + م - م + م + م = ۰ ایک طریق کو تعبیر کرتی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ خط مستقیم م = ص (لا-لا) + م + م دائرہ

لا + م = ۲ لا کو مس کرتا ہے، ص کی خواہ کچھ بھی قیمت ہو۔



(۶) نقطوں (۱) اور (۲) میں سے بالترتیب دو خط مستقیم ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہوئے کھینچے جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تقاطع کا طوق لا' + با' - ۲ = ۲۱۸۰ ماحصر طہ دائرے میں۔

(۷) ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک دوسرے خط سے جو سابق الذکر خط کے علی القوائم ہے ایک مستقل طول (۲) منقطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے مرکز کے طریق کی مساوات

(۸) ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ (۱) اور (۲) نقطوں سے اس تک پھینچے ہوئے عمودوں کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ بتاؤ کہ وہ خط ہمیشہ ایک دائرہ کومس کرتا ہے۔

(۹) ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں  $۱۱ = ۲۱ = ۵$  اور  $۳ - ۱۱ = ۵$  ہیں۔ بتاؤ کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کی مساوات  $(۲ - ۱۱) + (۱۱ - ۵) = ۱$  ہے۔

(۱۰) دائرہ لا + ما = ص کے لسان سے نقطہ (لا، م) کا جو قطبی ہے اگر وہ دائرہ (لا-ص) + ما = ص کو مس کرے تو ثابت کرو کہ (لا، م) ایک ایسے منحنی پر واقع ہے جس کی مساوات  $لا + ۲ = ص$  ہے۔

(۱۲) اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ  $LA^2 + MA^2 = 4$  تک کھینچے ہوئے

(۱۲) اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> = ۶ تک پہنچے ہوئے  
 خط مماس کا طول اسی نقطہ سے دائرہ لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> = ۶ سے ۳ + لا<sup>۲</sup> + ما<sup>۲</sup> = ۳ تک پہنچے  
 ہوئے خط مماس کے طول کا دوخند ہو تو ف + گ + ۴ = ۲ + ۴ = ۶

(۱۳) اس امر کے ذریعہ سے کہ کوئی سے تین دائروں کے بنیادی محور جو ان دائروں کے ایک ایک جفت کے لیے کھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ایک دائرہ کھینچا جاسکتا ہے جو کوئی سے دوسرے تین دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۱۴) دائروں  $لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$  اور  $لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$  کے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ دریافت کرو جو ایک نقطہ تقاطع تک پہنچنے لگے ہوں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے محیط سے اس کے ایک قطر پر جو مجموعہ دیا جاتا ہے وہ اس قطر کے قطعات کے ساتھ وسطی تناسب رکھتا ہے۔

(۱۶) ایک دائرہ  $لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$  اور ایک خط  $لا + ب + ما + ج = ۰$  دیے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ سینوں کا نظام  $لا + ما + ۲ گ + لا + ب + ما + ج = ۰$  ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جن کے مرکز دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے دیے ہوئے خط پر عملی القوا تم گزرنے والے خط پر واقع ہیں۔

(۱۷) سوال (۱۶) میں موجود دیا گیا ہے اس کی ہندی ترجمانی کرو۔

(۱۸) مندرجہ ذیل ہم محور دائروں کو مرسم کرو۔

$$(ا) لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$$

$$(ب) لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$$

$$(ج) لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$$

[ب سے پہلے مر = ۱ مان کر ان دائروں کا بنیادی مرکز کھینچو اور پھر مر کو دوسری مناسب مثبت منفی قیمتیں دیکر دائرے تیار کرو۔]

(۱۹) ایک نقطہ اسی طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے عمودی فاصلہ کے لحاظ سے بدلتا ہے بتاؤ کہ وہ مستحکم نقطہ ایک دائرہ کو مرسم کرتا ہے۔

(۲۰) اور ب دونوں ثابت نقطے ہیں اور ف ایک تیسرا نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ  $ن = لا + ب + ف$  ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک دائرہ ہے نیز یہ بھی بتاؤ کہ ن کی مختلف قیمتیں اگر لی جائیں تو ان تمام دائروں کا بنیادی محور ایک ہی ہے۔

(۲۱) ایک ثابت نقطہ و سے کوئی سا ایک خط مستقیم کھینچا جاتا ہے جو

ایک ثابت دائرہ سے نقطہ ف پر ملتا ہے اور اس خط پر ق ایک ایسا نقطہ لیا جاتا ہے کہ سطح وق  $\times$  دق مستقل۔ بتاؤ کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۲۲) ثابت کرو کہ دیے ہوئے دو دائروں کی مسادات ہمیشہ بشکل  $لا + ما + لا + لا + ب = ۰$  اور  $لا + ما + لا + ب = ۰$  بلکی جاسکتی ہے اور یہ کہ ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے اندر واقع ہو گا اگر  $لا + اور ب$  دونوں مثبت ہیں۔  
(۲۳) اگر دو دیے ہوئے دائروں کی مشابہت کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو بطور قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر کے کسی نقطہ سے بھی ان دیے ہوئے دو دائروں پر جو خطوط ماس کھینچے جاتے ہیں آپس میں متناظر نصف قطروں کی نسبت رکھتے ہیں۔

(۲۴) دائروں  $لا + ما + لا = ۰$  اور  $لا + ما + لا = ۰$  کے مشترک خطوط ماس ایک مساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

(۲۵) (ا) (ع) اور (ب) (ب) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر جو دائرہ کھینچا جاتا ہے اس کی قطبی مسادات  $ما + ب$  (جم طہ)  $+ ب$  (جم طہ)  $- ب$  (ب)  $+ (ب$  (جم عہ)  $- ب) = ۰$  ہے۔  
(۲۶) دیے ہوئے تین دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرنے والے دائرہ مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۲۷) ثابت کرو کہ دو ثابت دائروں کو مس کرنے والے تمام دائرے دوسرے دو ثابت دائروں میں سے ایک دائرہ پر علی القواکم ہیں۔

(۲۸) اگر دو دائروں کی مسادات  $لا + ما + لا + ب = ۰$  اور  $لا + ما + لا + ب = ۰$  ہیں تو ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل مسادات کے دائرے

$$\frac{لا + ما + لا + ب}{ما + ب} = \frac{لا + ما + لا + ب}{ما + ب} = \frac{لا + ما + لا + ب}{ما + ب}$$

باہم دیگر علی القواکم متقاطع ہیں۔

(۲۹) ایک مثلث کے زاویائی نقطے بالترتیب (۰، ۰)، (۰، ۰) اور (۰، ۰) (۲۰، ۲۸)

(۶۳)۔ ہیں ثابت کرو کہ اس کے دو نقطی دائرہ کی مساوات  

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$$

---

# آٹھواں باب

## خط مکانی کی مساواتیں

تعریفات —

۵۹ (۱) تراش مخروط۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے ایک ثابت خط مستقیم کے فاصلہ سے مستقل نسبت رکھتا ہے۔ اس ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں، اس ثابت خط مستقیم کو مرتب اور اس مستقل نسبت کو خروج المہر کہتے ہیں۔

یہ نسبت جب مساوات کی لینے اکائی ہوتی ہے تو طریق خط مکانی کہلاتا ہے، جب ایک سے چھوٹی ہوتی ہے تو خط ناقص اور جب ایک سے بڑی ہوتی ہے تو خط زائد۔

پہلے ہم خط مکانی کی مساوات اور اس کے ذریعہ اس کے چند اہم خواص دریافت کریں گے۔

## خط مکانی کی مساوات۔

فرض کرو شکل (۱۷۰) میں س ماسکہ ہے اور م ماسکہ مرتب۔ س و خط ماصا پر عمود کھینچو اور فرض کرو  $OS = ۱۲$ ۔ خط  $OS$  کو لا کا محور مانو اور  $OM$  کو لا کا محور۔

ف کوئی سا ایک نقطہ منحنی پر لو اور اس کے محدودوں کو لا و م

قرار دو۔

ف ن اور ف م محوروں پر عمود بناؤ اور ف کو ملاؤ۔

خط مکافاتی کی تقریف کے لحاظ سے س ف = ف م

∴  $m = s = f = 2$

ف ن ن م ن

یعنی  $u = v + (u - v)$

$$(1) \dots (1-11) \text{ } 1 \text{ } 1 = 1$$

یہی معنی کی مساوات ہے۔

منشی مذکور لا کے محور کو

ایک نقطہ میں منقطع کرتا ہے

جہاں ما۔

اور مساوات (۱) کی رو

سے حب ما۔ لولا = لے لے

$$j = 1$$

شکل ۲۷

نقطہ اخط مکانی کار اس کہلاتا ہے۔

اگر محدودوں کا محور اپر منتقل کیا جائے لیکن محوروں کی سمتوں میں کوئی

تغییر نہ ہونے دیا جائے تو

سساوات (۱)  $\alpha = \mu$  لا ..... (۲) میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

اس لحاظ سے ماسکہ نقطہ (۱، -) ہوتا ہے۔ اور خط لا + ل = ۰۔

میں اس ف = م ف = و ا + ا ن = ا و لا

چونکہ ہر ایک مثبت مقدار ہے لہذا ہمیشہ مثبت ہوگا۔ اور اس لیے

سخنی بالکل پیہر مقررہ آگنی منیبت ہا نیب واقع ہوگا۔ لاکھی کسی خاص منیت کے

لیے واضح ہے کہ ماسک دو قسمیں ہونگی جو مفید اریں باہد یگر مساوتی ہونگی۔

ان میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔ پس منحنی کے تمام وٹروں کی

جہولاکے محور کے علی القوائم ہو گئے محور لاتنصیف کر دیا۔

اور منحنی کے وہ حصے جو لا کے محور کی مثبت جانب ہو گئے اس کے

منفی جانب کے حصوں کے ہر لحاظ سے مساوی ہونگے۔ جیسے جیسے لا بڑھیں گے  
 ما بھی بڑھیں گے نہ تو لا کے بڑھنے کی کوئی حد ہے اور نہ ما کے بڑھنے کی کوئی  
 حد۔ پس ما کے محور کی مثبت جانب خط مکافی غیر محدود ہوتا ہے۔  
 ماسکے میں سے جو خط ہر نقب کے علی القوائم گزرتا ہے خط مکافی کا محور  
 کہلاتا ہے۔

ماسکے میں سے خط مکافی کے محور کے علی القوائم جو خط مستقیم کھینچا جاتا ہے  
 اس کا وتر خاص کہلاتا ہے۔

شکل (۱۷۲) میں  $س ل = ک ل = و س = ۲$  پس وتر خاص کا پورا  
 طول  $= ۴$

ہر ایسے نقطے کے لیے جو خط مکافی پر واقع ہے ہم نے دیکھا ہے کہ  
 ما  $= ۴ - لا$ ۔ پس اس منحنی کے اندر جو کوئی نقطہ واقع ہو اس کے لیے  
 ما  $= ۴ - لا$  منحنی ہوگا۔ اسی طرح منحنی کے باہر جو نقطہ ہوگا اس کے لیے ما  $= ۴ - لا$   
 مثبت ہوگا۔

خط مستقیم  $ما = مر + لا$  ج اور خط مکافی  $ما = ۴ - لا$  کے مشترک نقطوں کے  
 محدود ان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔ پس ان نقطوں کے لیے  
 $(مر + لا) = ۴ - لا$  یعنی  $مر = ۴ - ۲لا$  (۲ مر ج  $- ۴$ )  $لا + ج = ۴$  ..... (۳)  
 چونکہ یہ دوسرے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ہر ایک خط مستقیم  
 خط مساوی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہوتے ہیں۔

اگر مر بہت چھوٹا ہے تو مساوات (۳) کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے۔  
 جب مر  $= ۰$  تو واضح ہے کہ ایک اصل نامتناہی بڑی ہو جاتی ہے۔ پس  
 خط مکافی کے محور کے متوازی جو کوئی خط مستقیم کھینچا جاتا ہے منحنی سے ایک نقطہ  
 پر محدود و فاصلہ پر ملتا ہے اور دوسرے نقطہ پر راس سے نامتناہی بڑے فاصلہ  
 پر ملتا ہے۔

(ب) خط مکافی  $ما = ۴ - لا$  کو خط مستقیم  $ما = مر + لا$  ج کے





لہذا  $ما = ۲ (لا + لام)$  ..... (۲۰)  
 واضح ہے کہ مکافی کے راس ۱ یعنی نقطہ (۰، ۰) کے خطوط  $ما$  کی مساوات  
 $لا =$  ہے پس یہ خط  $ما$  مکافی کے محور پر علی القوائم ہے۔  
 مکافی کے  $ما$  کی یہ مساوات  $ما = ۲ (لا + ج)$  کی شکل میں لکھی جاتی ہے تو

$$ما = \frac{۲}{۱} لا + \frac{۲}{۱} ج \quad جس میں صر = \frac{۲}{۱} ج \quad اور ج = \frac{۲}{۱} لا$$

پس  $ج = \frac{۱}{۲} ما$  جیسا کہ ذیلی فصل (دب) میں اور طریقہ سے بتایا گیا ہے۔

مثال (۱)۔ مکافی کے دو خطوط  $ما$  کے نقطہ تقاطع کا معین، ان

خطوط  $ما$  کے تقاطع  $ما$  کے معینوں کا حسابی اوسط ہے۔

(لا، لا) اور (لام، لام) نقطوں پر کے خطوط  $ما$  کی مساواتیں بالترتیب

$$ما = ۲ (لا + لام) \quad اور \quad ما = ۲ (لام + لا)$$

ایک کو دوسری میں سے تفریق کرنے سے ان مساویوں کے مشترک نقطہ

کے لیے  $ما - (لام + لا) = ۲ (لا - لام)$   $\therefore \frac{۱}{۲} (لام + لا) = \frac{۱}{۲} (لام - لا)$

واضح ہو کہ خطوط  $ما$  کی مساواتوں کو جمع کرنے سے  $ما = (لام + لا) = ۲ (لام + لا)$

$$\frac{۱}{۲} (لام + لا) = ۲ (لام + لا) \quad \therefore \frac{۱}{۲} (لام + لا) = ۲ (لام + لا) \quad (۲)$$

مثال (۲)۔ مکافی کے دو ایسے خطوط  $ما$  کے تقاطع کا طریقہ جو

باہم دیگر علی القوائم ہوں مکافی کا ہر نقطہ ہے۔

فرض کرو کہ ان خطوط  $ما$  کی مساواتیں  $ما = ۲ (لا + ج)$  اور

$$ما = ۲ (لام + ج)$$

چونکہ یہ باہم دیگر علی القوائم ہیں اس لیے  $صر =$ ۔ اس مساوات دوم  
 ہر کی رقموں میں

$$ما = \frac{۱}{۲} لا - \frac{۱}{۲} لام$$

اس مساوات کو پہلی مساوات میں سے تفریق کرنے سے مشترک نقطہ کے

مقطوعہ کی مساوات = لا (۱ + ۱/۲) + ۱/۲ (۱ + ۱/۲) یعنی لا + ۱ = حاصل ہوتی ہے جو مرتب کی مساوات ہے۔

### (د) مکانی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات۔

مکانی کے نقطہ (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

ما + ۲ = لا (۱ + ۱/۲) ہے یعنی ما + ۲ = لا + لا + ۲ = ۰ ہے۔

اس خط کے علی القوائم خط کی مساوات ۲/ما + ما + لا + ج = ۰ ہے جس میں ج کوئی مستقل ہے چونکہ ہل لا، ما پر کا عماد مقصود ہے اس لیے آخر الذکر مساوات میں بجائے لا اور ما کے لا اور ما لکھنے سے ۲/ما + ما + لا + ج = ۰ جس سے ج کی قیمت - ۲/ما - ما - لا برآمد ہوتی ہے۔

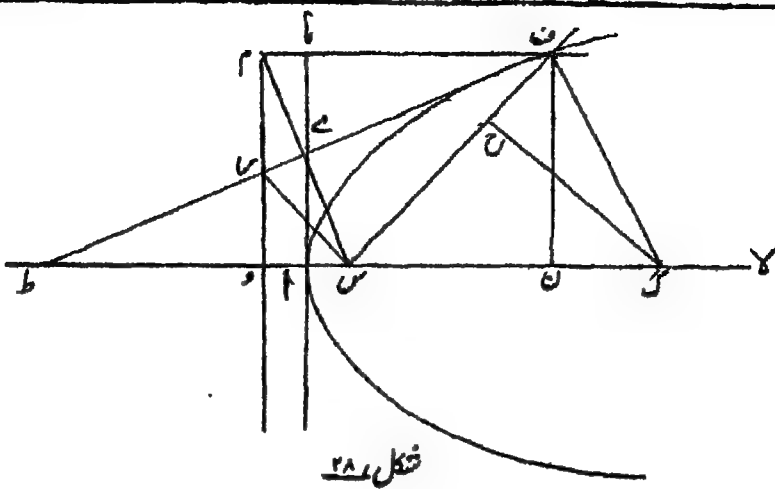
پس ۲/ما + ما + لا - ۲/ما - ما - لا = ۰ یعنی مکانی کے نقطہ لا، ما پر کے عماد کی مساوات ۲/ما + (ما - لا) + (لا - لا) = ۰ ..... (۱)  
چونکہ ۲/ما = ۱ لہذا ۸/ما + (ما - لا) + (لا - لا) = ۰ ..... (۲)

جو بشکل ما = - ۲/ما - لا + ما + ۸/ما ..... (۳) لکھی جا سکتی ہے۔

- ۲/ما کے عوض م لکھنے سے ما = - ۲/ما - لا + ما + ۸/ما ..... (۴) تبدیل

پس مساوات (۳) بشکل ما = م - لا - ۲/ما - لا + ما ..... (۴) تبدیل ہو جاتی ہے جو بعض صورتوں میں زیادہ مفید پائی جاتی ہے۔  
(۵) اب ہم مکانی کی مساوات کے ذریعہ اس منحنی کے بعض اہم منہدی خاص کو ثابت کریں گے۔

شکل ۲۸ میں مکانی ف ا کھینچا گیا ہے جس کا مرتب و م ہے۔ ف پر کا خط عماد ف ط مرتب سے نقطہ س پر ملتا ہے اور محور سے نقطہ ط پر۔ ف سے ف م، ف ن مرتب اور محور پر عمود کھینچے گئے ہیں ف کے محدود لا، ما فرض کرو اس پر کے عماد کی مساوات ما + ۲ = لا (۱ + ۱/۲) ..... (۱)



جہاں یہ خط محور مکافہ یعنی محور ولا سے ملتا ہے وہاں ما = پس اس نقطہ پر  
لا + لا = یعنی ط ل = ا ن . . . . . (عہ)  
∴ ط س = ل س + ا ن = س ف . . . . . (بہ)  
اور چونکہ ط س = س ف زاویہ س ط ف = زاویہ س ف ط۔ پس  
خط ل س ف ط خزاوید س ف م کی تنصیف کرتا ہے۔ . . . . (جہ)  
یہی ظاہر ہے کہ مثلث س ر س ف اور م ف ہر کحاط سے ایک  
دوسرے کے مساوی ہیں۔

لہذا اس س ف = س م ف = ایک سزاوٹی قائمہ . . . . . (ضہ)  
چونکہ م نقطہ (-۱، ۱) ہے اور س نقطہ (۱، ۰) خط س م کی مساوات  
$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{x-1}{x+1} \quad \dots \dots \dots (۲) \text{ ہے}$$

واضح ہے کہ یہ خط ف پر کے خط ماس کے علی القوائم ہے جس کی سادہ (۱) ہے  
 :۔ م خط ماس ف ط کے علی القوائم ہے۔ . . . . (صہ)  
 چونکہ ف ط خط م کے علی القوائم اور زاویہ س ف م کی تنصیف  
 کرتا ہے اس لیے وہ م کی بھی تنصیف کرے گا۔ اگر م اور ف ط کے تقاطع کا

نقطہ سے قرار دیا جائے  $س = م$  لیکن  $س = ۱$  اور  $اس$  لیے  $۱ = م$  کے خط و م کے متوازی ہے۔ اور اس لیے مکافی کے  $اس$  پر کا خط  $ماس$  ہے۔ پس مکافی کے  $ماس$  میں سے جو خط  $اس$  کے کسی خط  $ماس$  ف ط پر علی القوا  $م$  کھینچا جاتا ہے ف ط سے مکافی کے نقطہ  $اس$  پر  $اس$  کے خط  $ماس$  سے ملتا ہے۔ . . . . (ش)

اس مسئلہ کو ہم ہندسہ تحلیلی سے بھی اس طرح ثابت کر سکتے ہیں :-  
مکافی کے کسی خط  $ماس$  کی مساوات  $ما = م + لا + \frac{۱}{۲}$  . . . . . (س) فرض کرو  
اس خط پر  $ماس$  کے (۱، ۰) سے گرائے ہوئے عمود کی مساوات

$$۱ = م - \frac{۱}{۲} (لا - ۱) ہوگی۔$$

$$یعنی ما = - \frac{لا}{۲} + \frac{۱}{۲} . . . . . (۲) ہوگی۔$$

ظاہر ہے کہ خط ط (۳) اور (۴) اس نقطہ پر ملتے ہیں جہاں  $لا = ۰$ ۔

مکافی کے نقطہ ف یعنی (لا، ۱) پر کے عمود کی مساوات

$$۲ (۱ - ما) + ما (لا - لا) = ۰ ہے (ذیلی فصل د)$$

$$نقطہ گ پر ما = ۰ اور اس لیے - ۲ (۱ - ما) + ما (لا - لا) = ۰$$

$$یعنی ۱۲ = لا - لا = آگ - ان = ن گ$$

$$۱۲ = ن گ (یعنی مستقل) . . . . . (یہ)$$

### سوالات ۸ (۱)

(۱) ثابت کرو کہ مکافی ما = ۱ کے وتر خاص کے سروں پر کے

خط ط  $ماس$  اور ان کے عمودوں کی مساواتیں بالترتیب  $لا + ۱ = ۰$  اور  $ما \pm لا + ۳ = ۰$  ہیں۔

(۲) بتاؤ کہ مساوات  $لا + ۴ + ما + ۲ = ۰$  ایک ایسے مکافی کو تعبیر کرتی ہے

جس کا  $اس$  نقطہ (۲، ۱) پر ہے جس کا وتر خاص ۲ ہے اور جس کا محور  $ما$  کے محور کے متوازی ہے۔

(۳) اگر مکافی کے محور کے کسی ثابت نقطہ وہیں سے کوئی ساوترف و ف کھینچا جائے تو بتاؤ کہ ف اور ف کے معینوں کا ماہل ضرب مستقل ہے اور اسی طرح ان کے مقطوعوں یا فصول کا ماہل ضرب بھی مستقل ہے۔  
(۴) مکافی کے خطوط حماس = م + لا + م اور م = م + لا + م کے نقطہ تقاطع کے محدود دریافت کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے جبکہ م مستقل ہے اور جب م = ۱۔ تو یہ خط مستقیم مکافی کا مرتب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مکافی م = م + لا کے اندرونی مثلث کا رقبہ  
۱/۲ (م - م) (م - م) (م - م) ہے جس میں م، م، م مثلث کے زاویہ  
نقطوں کے معین ہیں۔

دو کسی نقطہ سے مکافی کے دو خطوط حماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگے یہ لحاظ اس کے کہ نقطہ مکافی کے باہر، اس پر یا اس کے اندر واقع ہے۔

م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط م = م + لا + م ..... (۱) مکافی  
۱/۲ م + لا کو مس کرتا ہے۔

یہ خط ایک مخصوص نقطہ لا، م میں سے گزرتا ہے اگر م = م + لا + م لینے  
اگر م = لا - م + لا = ۰ ..... (۲)

مساوات (۲) بہ لحاظ م ایک دو درجی مساوات ہے۔ اس سے مکافی کے ان خطوط حماس کی سمتیں دریافت ہوتی ہیں جو نقطہ لا، م میں سے گزرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی دو ہلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطہ لا، م میں سے مکافی پر عموماً دو خطوط حماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ اگر م = ۱۔ لا ثابت ہے تو یہ ہلیں حقیقی ہیں اگر منفی ہے تو منطبق اور اگر منفی ہے تو خیالی۔ یعنی نقطہ (لا، م) اگر مکافی کے باہر ہے تو خطوط حماس حقیقی ہونگے، اگر نقطہ مکافی پر

ہوگا تو خطوطِ تماس منطبق ہونگے اور اگر اندر ہوگا تو خیالی۔  
 (۱) کسی نقطہ سے مکانی پروڈ خطوطِ تماس جو کھینچے جاسکتے  
 ہیں ان کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی  
 مساوات۔

فرض کرو نقطہ 'لا'، 'ما' سے خطوطِ تماس کھینچے گئے ہیں اور خط مکانی  
 کے ساتھ ان کے نقاطِ تماس بالترتیب 'عم'، 'بیہ' اور 'عم'، 'بیہ' ہیں۔  
 (عم، 'بیہ') اور (عم، 'بیہ') پر کے خطوطِ تماس کی مساواتیں  
 مابہ = ۱۲ (لا + عم) اور مابہ = ۱۲ (لا + عم) ہیں۔  
 چونکہ نقطہ 'لا'، 'ما' ان دونوں خطوطِ مستقیم پر واقع ہے۔ لہذا  
 مابہ = ۱۲ (لا + عم) (۱) اور مابہ = ۱۲ (لا + عم) (۲)۔  
 لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں کہ (عم، 'بیہ') اور  
 (عم، 'بیہ') نقطے خطِ مستقیم مابہ = ۱۲ (لا + عم) پر واقع ہوں۔  
 تیس مساوات (۳) نقطہ 'لا'، 'ما' سے کھینچے ہوئے خطوطِ تماس کے نقاطِ تماس میں  
 گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

کسی نقطہ 'ف' سے مکانی پر کھینچے ہوئے دو خطوطِ تماس کے نقاطِ تماس  
 کو ملانے والے خطِ مستقیم کو 'ف' کا قطبی یہ لحاظ مکانی کہتے ہیں۔

(ب) اگر مکانی کے لحاظ سے کسی نقطہ 'ف' کا قطبی نقطہ  
 'ق' میں سے گزرتا ہے تو 'ق' کا قطبی 'ف' میں سے گزرے گا۔

ف کے محدودوں کو 'لا'، 'ما' اور ق کے محدودوں کو 'لام' فرض کرو۔  
 نقطہ 'ف' کے قطبی 'بہ' لحاظ مکانی مابہ = ۱۴ (لا کی مساوات  
 مابہ = ۱۲ (لا + عم) ہے

اگر یہ خط نقطہ 'ق' (یعنی لام) میں سے گزرتا ہے تو مابہ = ۱۲ (لام + لا)

اس مساوات کے تشاکل سے واضح ہے کہ وہ اس شرط کو بھی ظاہر کرتی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گزرنے چاہیے۔  
اس نتیجے سے مشتق ہوتا ہے (جیسا کہ دائرہ کی صورت میں بتایا گیا تھا) کہ اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ سر پر ملتے ہیں تو اس خطِ مستقیم ف، ق کا قطب ہے۔ چونکہ ماسکہ (لا،) کے قطبی کی مساوات لا + لا = ۰ ہے لہذا ماسکہ کا قطبی مکانی کا مرتب ہے۔

اگر کسی نقطہ مرتب پر واقع ہے تو ق ماسکہ کے قطبی پر ہے۔ پس ق کا قطبی ماسکہ میں سے گزریگا۔ پس اگر مرتب کے کسی نقطہ سے مکانی پر خطِ مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط تماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گزریگا۔

(ج) مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مکانی کے محور کے متوازی ہے۔

مکانی ۱-۲ = لا + لا = ۰ پر کے دو نقطوں (لا، لا) اور (لام، لام) کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات جیسا کہ ۵-۶ (ج) میں بتایا گیا ہے۔  
۱-۲ = لا + لا = ۰ ماسکہ = لا + لا = ۰ ..... (۱)  
اگر یہ خطِ مستقیم مکانی کے محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو

$$\text{مس طہ} = \frac{۱-۲}{لا + لا} \dots \dots \dots (۲)$$

لیکن اگر وتر کے وسطی نقطہ کے محدّد (لا، لا) ہوں تو

$$۱-۲ = لا + لا \text{ اور } ۱-۲ = لا + لا$$

پس مساوات (۲) کی دوسری طرف =  $\frac{۱-۲}{لا + لا}$  یعنی ماسکہ = ۲ (مس طہ) ... (۳)

جس سے ظاہر ہے کہ جب تک خط متقل ہے مابھی متقل ہے۔  
 :: مکانی کے متوازی و تروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا  
 طریق ایک خطِ تقسیم ہے جو مکانی کے محور کے متوازی ہے۔

[ طریق دیگر۔ خط تقسیم  $ما = مر + ج$  مکانی  $ما = ۲ + لا$ ۔ کو جس مقام پر  
 قطع کرتا ہے وہاں  $ما = مر + ج$  ہیں مابھی اصلیں اگر  $ما$  قطع کر دے  
 جائیں تو  $ما + ما = ۲$  اس لیے اگر وتر کے وسطی نقطہ کا معین  $ما$  ہے تو ج کی  
 جملہ قیمتوں کے لیے  $ما = ۲$  ]

تشریف۔ کسی مخروطی کے متوازی و تروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں  
 کا طریق قطر کہلاتا ہے۔ جن وتروں کی قطر تنصیف کرتا ہے اس کے معین  
 کہلاتے ہیں۔

فصل ۵۹ (۱) میں ہم نے دیکھا ہے کہ مکانی کا قطر مکانی سے اس کے  
 اس سے محدودناصلہ پر صرف ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر  
 مکانی کو قطع کرتا ہے اس قطر کا سر کہلاتا ہے۔

چونکہ قطر کے سرے پر کا ماس قطر کا وہ معین ہے جو مکانی سے دو متعلق  
 نقطوں میں ملتا ہے اس لیے مکانی کے قطر کے سرے پر کا

خطِ ماس ان و تروں کے متوازی ہے جن کی وہ قطر تنصیف کرتا ہے۔

(د) مکانی کی مساوات جبکہ اس کا کوئی قطر اور اس کے  
 سرے پر کا خطِ ماس محدود مالتے جائیں۔

فرض کرو شکل (۶۹) میں ق مکانی کے قطر کا سر ہے اور ف پر کا خطِ ماس  
 محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب  $ن ف = ۲$  م طہ (فصل ۶۰ ج ۱)





بصورت مکتوس (ا) لا + م + ن + (ن) = کی شکل کی کوئی  
 سی مساوات جس میں دوسرے درجہ کی نہیں یہ شکل ایک مکمل مربع کے ہوتی ہیں خط مکانی کو  
 تعبیر کرتی ہیں۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ خط لا + م + ن = پر مکانی پر کے کسی  
 نقطہ کا عمود اسی نقطہ سے خط لا + م + ن = پر کے عمود کے متساوی ہے۔  
 جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم ان خطوط کو لا اور ما کے نئے محور قرار  
 دیں تو مکانی کی مساوات شکل ما = پ ل میں تبدیل ہو جاتی ہے۔ پس  
 مساوات (ا) لا + م + ن + (ن) لا + م + ن = ایک مکانی کو تعبیر  
 کرتی ہے جس کا ایک قطر لا - م + ن = ہے اور اس قطر کے سرے  
 پر کا خط ماس لا + م + ن = ہے۔

(۲) - اگر کسی مکانی کی مساوات اس کے کسی قطر کے سرے پر کے  
 ماس کو محور مان کر ما = م + لا = قرار دی جائے تو (ا) خط ما = م + لا =  
 صریح متعام قیمتوں کے لیے مکانی کا ایک خط ماس ہو گا۔ (۲)  
 مکانی کے کسی نقطہ (لا، ما) پر کے خط ماس کی مساوات ما = م + لا =  
 ہو گی۔ اسی طرح (۳) مکانی کے محاذ سے (لا، ما) کے قطبی کی مساوات  
 ما = م + لا = اور (۴) خط ما = م + لا کے متوازی دھروں  
 کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات ما = م + لا = ہو گی۔

وانع ہو کہ ممرحہ بالا چار مسئلوں کے از سر نو ثبوت کی اس لیے  
 ضرورت نہیں کہ (ب) اور (ج) اور (د) اور (ج) کے نتائج  
 محور خواہ ملی القوا کم ہوں یا نہیں صحیح ہیں۔

مثال (۱) - مکانی کے دو ایسے خط ماس کے نقطہ تقاطع کے  
 طریق کی مساوات جو باہم دیگر ایک دیے ہوئے سہ اولیہ پرمائل ہوں  
 خط ما = م + لا = مکانی ما = م + لا کا ایک ماس ہے صریح قیمت  
 خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر لا، م معلوم مانے جائیں تو مساوات ما = م + لا = سے



## سوالات ۸ (ب)

(۱) ثابت کرو کہ مکانی  $۱^۲ = ۱$  لا اور مکانی  $۱^۲ = ۱$  ب مابہر دیگر زاویہ میں  $۱^۲ = ۱$  (ب + ب) پر متقاطع ہیں۔

(۲) اگر ف س ق ایک مکانی کا ماسکی وتر ہو اور ف ۲ سرب سے نقطہ م پر ملے تو بتاؤ کہ م ق مکانی کے محور کے متوازی ہو گا۔

(۳) ثابت کرو کہ مکانی کے دو ایسے نقطوں پر کے خطوط حماس کے نقطہ تقاطع کا طریق جن کے سینیں باہر دیگر مستقل نسبت رکھتے ہیں ایک مکانی ہے۔

(۴) ایک مکانی کے وتر خاص کے کسی نقطہ سے اس کے (یعنی وتر خاص) سروں پر کے خطوط حماس پر عمود ڈالے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ ان عمودوں کے پیروں کو ملانے والا خط مکانی کو مس کرتا ہے۔

(۵) کسی نقطہ ط سے بہ لحاظ مکانی اس کے قطبی پر جو عمود ط ن کھینچا جاتا ہے محور سے نقطہ م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ط ن x ط م مستقل ہے تو ط کا طریق ایک مکانی ہے۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ اگر ط ن : ط م کی نسبت مستقل ہے تو اس صورت میں بھی طریق ایک مکانی ہے۔

(۶) بتاؤ کہ مکانی کے ایک ایسے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے ایک مکانی ہے۔

(۷) مکانی کے کسی نقطہ و میں سے کھینچا ہوا قطر اگر کسی وتر سے ف پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے خطوط حماس قطر سے ق ق پر ملیں تو بتاؤ کہ و ف = ۲ وق = ۲ وق

(۸) ثابت کرو کہ دائرہ لا ۱ لا ۲ لا ۳ لا کے کسی نقطہ کا قطبی

بہ لحاظ دائرہ لا ۱ + لا ۲ + لا ۳ = مکانی ۱ + لا ۲ + لا ۳ = کو مس کر لیا۔

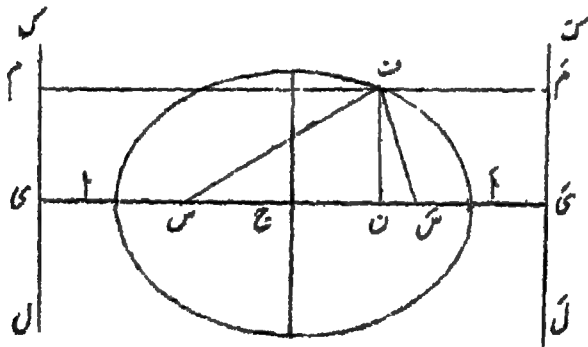


## نواں باب

### خط ناقص کی مساواتیں

۶۱۔ تعریف۔ جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے جو ماسکہ کہلاتا ہے ایک ثابت خط مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جو کہ مرتب کہلاتا ہے) ایک کافی سے کمتر مستقل نسبت رکھتا ہے تو اس نقطہ کا طریق خط ناقص ہے۔

(۱) خط ناقص کی مساوات۔  
فرض کروں ماسکہ اور ک ل مرتب ہے (شکل ۳)۔ س ی مرتب



شکل ۳

پر عمود ڈالو۔ س ی کو ۲ پر اس طرح تقسیم کرو کہ  $\frac{س ی}{۱} = \frac{ن ی}{۲}$  جس میں

ز ایک سے کم ہے۔  
 ی میں کو آگے بڑھانے پر ایک نقطہ آ ایسا لاندہ آئیگا جس کے لیے  
 $\frac{س}{ی} = \frac{ز}{ج}$ ، ج کو آ کا وسطی نقطہ مانو اور  $آ = ۲$   
 تب  $آس = ز \times ی$  اور  $س = ز \times ی$   
 $\therefore آس + س = ز(ی + ی)$   
 پس  $آج = ز \times ی$  ج  $\therefore ی = \frac{ج}{ز}$  ..... (۱)  
 نیز  $س - آس = ز(ی - ی)$   
 یعنی  $آس - س = ز \times ی$   
 $\therefore س = ز \times ج$  ..... (۲)  
 اب نقطہ ج کو مبدا ج آگولا کا محور اور ج میں سے ایک خط آ کا علی التوائم کا  
 محور مانو۔

فرض کرو ف منحنی پر کوئی سا ایک نقطہ ہے اور اس کے محدود لا، ما ہیں  
 تب  $س ف = ز \times ف م$   $\therefore س ن + ن ف = ز \times ی ن$   
 لیکن  $س ن = س ج + ج ن = ل + ز + لا$  اور  $ی ن = ی ج + ج ن = ل + لا$   
 پس  $(ل + لا) + ما = ز(ل + لا)$  یعنی  $ما = ل(ز - ۱)$  ..... (۳)  
 $\therefore \frac{لا}{ز} + \frac{ما}{(ز-۱)} = ۱$  ..... (۴)  
 لا = لکھنے سے  $ما = \pm \sqrt{(ز-۱)لا}$  یہ منحنی کے محور ما پر کے مقطوعات ہیں۔  
 اگر ازن طولوں کو  $\pm$  ب کہیں تو  $ب = ل(ز-۱)$  ..... (۵)  
 اور منحنی کی مساوات (۳) صورت  $\frac{لا}{ز} + \frac{ما}{ب} = ۱$  ..... (۶)  
 اختیار کر لیتی ہے۔

وتر خاص وہ وتر ہے جو محور میں سے مر تب کے متوازی کھینچا جاتا  
 ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں  $لا = ۰$  لڑ لکھا جائے  
 تب  $ما = ب$   $(ز-۱) = \frac{ب}{ل}$  اور دئے مساوات (۴)  
 پس نیم وتر خاص کا طول  $\frac{ب}{ز}$

مساوات (۵) میں ماکہ قیمت ب سے بڑھ نہیں سکتی ورنہ لا منفی مقدار ہو جائیگی۔ اسی طرح لاکہ قیمت ا سے بڑھ نہیں سکتی۔ پس خط ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہے۔

اگر لا عدد ا سے کم ہو تو لا مثبت مقدار ہوگی اور لاکہ کسی مخصوص قیمت کے لیے ماکہ دو مساوی اور بلحاظ علامت مختلف قیمتیں ہوں گی۔ پس لا کا محور اس منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح اگر لا عدد ب سے کم ہو تو لا مثبت مقدار ہوگی اور ماکہ کسی مخصوص قیمت کے لیے لاکہ دو مساوی اور باہد دیگر مخالف قیمتیں ہوں گی۔ پس ماکہ کا محور خط ناقص کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر لاکہ کے محور پر س اور ی دو ایسے نقطے لیے جائیں کہ ج س = س ج اور ج ی = ی ج تو نقطہ س بھی منحنی کا ایک ماسکہ ہوگا اور ی میں سے ج ی پر علی القوائم کھینچا ہوا خط اس کا تناظر مرتب ہوگا۔

اگر (لا، ماکہ) منحنی پر کا کوئی نقطہ ہو تو لا مساوات  $\frac{لا}{ب} + \frac{ماکہ}{ا} = ۱$  کی شرط کو پورا کرے گا۔ اور ایسی صورت میں محدود - لا اور - ماکہ کے لیے بھی یہ مساوات صادق آئیگی۔ لہذا نقطہ (- لا، ماکہ) بھی اس منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن (لا، ماکہ) اور (- لا، ماکہ) نقطے مبدا میں سے گزرنے والے خط مستقیم پر ہیں اور مبدا سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں۔ پس مبدا اس میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تفسیف کرتا ہے اور اس لیے منحنی کا مرکز ہے۔

ماسکوں میں سے گزرنے والا وتر محور اعظم کہلاتا ہے اور مرکز میں سے اس پر علی القوائم گزرنے والا وتر محور اقل کہلاتا ہے۔

(ب) ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی

تعیین

شکل بالا میں چونکہ س ف = ز ف م لہذا س ف = ز ف م  

$$= (ز ی ج + ج ن) = ز (ا + \frac{ب}{ا}) = ا + ز لا$$



اور سن ف = ز x ن ی = ز (ج ی - ج ن) = ۱ - ز لا

پس سن ف + سن ف = ۲

اس خواص کے مد نظر ناقص کی بعض اوقات یوں تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلوں کا محاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے۔

اس تعریف سے آغاز کر کے ناقص کی مساوات حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ یہ مستقل محاصل جمع ۲ ہے اور ان دو ثابت نقطوں کا درمیانی فاصلہ ۲ وز ہے۔ ان ثابت نقطوں کو لانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء مانو اور اس خط کو اور اس کے حتی القوائم خط کو محدود قرار دو۔ تب معنی کی مسئلہ شرط کے بموجب

$$۲ = \sqrt{(لا - ۱)^2 + ۱^2} + \sqrt{(لا + ۱)^2 + ۱^2}$$

اس کو منطبق بنانے پر  $۱^2 + (لا - ۱)^2 = ۱^2 + (لا + ۱)^2$  اور یہ ناقص کی وہی مساوات ہے جو قبل ازیں دوسری تعریف کے ذریعہ سے حاصل کی گئی ہے۔

(ج) خط ناقص کی قطبی مساوات۔

اگر مرکز کو قطب مانا جائے تو مساوات  $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$  میں لا کے عوض سرجم طہ اور مان کے عوض سر جب طہ لکھنے سے قطبی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ یہ مساوات

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \text{ ہے یعنی } \frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \text{ جب طہ}$$

مساوات (۱) صورت  $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$  (۱) - (۲) جب طہ ..... (۲) میں لکھی جاسکتی ہے۔

چونکہ  $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$  مثبت ہے اس لیے مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ  $\frac{۱}{r}$  کی اقل قیمت  $\frac{۱}{a}$  ہے۔ اور جیسے جیسے طہ صفر سے بڑھ کر  $\frac{۱}{b}$  ہوتا ہے ویسے ہی  $\frac{۱}{r}$  کی قیمت بڑھتی جاتی ہے۔ اس کی اعظم قیمت  $\frac{۱}{b}$  ہوتی ہے۔ پس نیم قطر

سمتی لڑ سے گھٹ کر ب ہوتا جیسے طہ صفر سے بڑھ کر  $\frac{\pi}{2}$  ہوتا ہے۔  
 [نوٹ - ہم نے دیکھا ہے کہ مرکز کو مبدا ماننے سے ان تمام نقطوں کے  
 لیے جو ناقص پر واقع ہیں  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$  خط مکانی کی صورت میں جیسا کہ  
 بتایا گیا تھا اسی طرح ناقص کے لیے بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر لا، مانغنی  
 کے اندر کے کسی نقطہ کے محدود ہوں تو جملہ  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1$  منغنی ہوگا اور اگر وہ  
 منغنی کے باہر کے کسی نقطہ سے متعلق ہوں تو  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1$  مثبت ہوگا۔]  
 (و) کسی دیے ہوئے خط مستقیم اور ناقص کے نقاط تقاطع

کی تعیین اور اس خط کے منغنی کو منس کرنے کے شرائط۔  
 فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات  $ما = مر + ج$  ہے اور ناقص کی  
 مساوات  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$ ۔  
 اس خط اور اس منغنی کے مشترک نقطوں کے لیے یہ دونوں مساواتیں  
 صحیح ہونگی لہذا ان مشترک نقطوں پر  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$  (مر + ج) = 1  
 یعنی لا (ب + لا مر) + 2 مر ج لا + لا (ج - ب) = 0۔  
 یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو اصلیں ہونگی حقیقی، منطوق یا خیالی۔  
 پس لاکسی دو قیمتیں ہونگی اور ان کو خط مستقیم کی مساوات میں درج کرنے سے  
 ماکسی دو تناظر قیمتیں دریافت ہو جائیں گی۔  
 لاکسی دو قیمتیں باہم دیگر مساوی ہونگی اگر لا (ج - ب) (ب + لا مر) = مر ج لا  
 یعنی اگر ج' = لا مر' + ب'

پس اس صورت میں ماکسی دو قیمتیں بھی مساوی ہونگی۔ پس دو نقطہ جن میں دیا ہوا  
 خط مستقیم ناقص کو منقطع کرتا ہے منطوق ہونگے اگر ج = لا مر' + ب'  
 پس مر کی جملہ قیمتوں کے لیے خط مستقیم  $ما = مر + ج$  یا  $ما = مر + لا مر' + ب'$  دیا ہوئے  
 ناقص کو منس کریگا۔ چونکہ جذر المربع کی علامت مثبت یا منغنی ہو سکتی ہے اس لیے  
 واضح ہے کہ ہر ایک قیمت کے لحاظ سے ناقص کے دو خط ماس ہوتے ہیں  
 جو باہم دیگر متوازی ہیں۔ یہ دو متوازی خط ماس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر

واقع ہیں۔

(۵) ناقص پر کے کوئی سے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی

مساوات اور منحنی کے کسی نقطہ پر کے خط حماس کی مساوات  
 فرض کرو ناقص پر کے دو نقطوں کے محدود 'لا' اور 'لام' ماہ ہیں۔ ان کو  
 لانے والے خط مستقیم کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{لا - لا}{لا - لا}$$

چونکہ یہ نقطے ناقص پر واقع ہیں اس لیے  $\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = ۱$  اور  $\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = ۱$

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{لا - لا}{لا - لا}$$

(۱) اور (۲) کے سمتے جانب کے جلوں کو باہر گیر ضرب دینے اور اسی طرح  
 ان کے بائیں جانب کے جلوں کو باہر گیر ضرب دینے سے

$$\frac{(لا - لا)(لا + لا)}{لا} - \frac{(لا - لا)(لا + لا)}{لا} = \frac{(لا - لا)(لا + لا)}{لا}$$

$$\frac{لا(لا - لا)}{لا} + \frac{لا(لا - لا)}{لا} = \frac{لا(لا - لا)}{لا} + \frac{لا(لا - لا)}{لا}$$

$$(۳) \dots\dots\dots = \frac{لا(لا - لا)}{لا} + \frac{لا(لا - لا)}{لا} = \frac{لا(لا - لا)}{لا} + \frac{لا(لا - لا)}{لا}$$

پس ناقص کے نقطوں (لا، لا) اور (لا، لا) کو ملانے والے خط مستقیم  
 یعنی وتر کی یہی مساوات ہے۔ حماس کی صورت میں لا = لا اور لا = لا

$$\text{پس } \frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = ۱ \dots\dots\dots (۴) \text{ (لا، لا) پر کے خط حماس}$$

کی مساوات ہے۔

نتیجہ صریح۔ (۱) محور اعظم کے سروں کے محدود (لا، لا) اور (لا، لا) ہیں

پس از روئے مساوات (۳) ان نقطوں پر کے خطوط حماس کی مساواتیں علی الترتیب  
 $لا = لا$  اور  $لا = لا$  ہیں پس یہ حماس محور اقل کے متوازی ہیں۔ اس طرح  
 محور اقل کے سروں پر کے خطوط حماس محور اعظم سے متوازی ہیں۔

(۲) ناقص کے کسی نقطہ لا، ما، پر کا خط حماس نقطہ (لا، ما) پر کے  
 خط حماس کے متوازی ہے اور یہ دونوں نقطے منحنی کے مرکز میں سے گزرنے والے  
 خط پر واقع ہیں۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر  
 خطوط حماس باہم دیگر متوازی ہیں۔

(و) خط  $لا + م + ن =$  کے ناقص کو مس کرنے

کی شرط۔

مبدأ کو ان نقطوں سے ملانے والے خط کی مساوات جہاں خط مستقیم  
 $لا + م + ن =$  ناقص  $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} = \frac{لا + م + ن}{ن}$  کو قطع کرتا ہے  
 $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} - \left( \frac{لا + م + ن}{ن} \right) = 0$  ہے۔

اس لیے کہ  $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} = 1 = \left( \frac{لا + م + ن}{ن} \right)$  پس  $\frac{لا}{وا} + \frac{ما}{با} - \left( \frac{لا + م + ن}{ن} \right) = 0$ ۔ (۱)

جو ایک متجانس درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس لیے مبدأ میں سے گزرنے والے  
 دو خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر دیا ہوا خط ناقص کو دو منطبق نقطوں میں قتا ہے تو مساوات (۱) دو منطبق  
 خطوط کو تعبیر کرے گی۔ لہذا مساوات (۱) کے سیدھے جانب کا جملہ ایک مکمل مربع  
 ہونا چاہیے۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$\left( \frac{لا}{وا} - \frac{۱}{وا} \right) \left( \frac{ما}{با} - \frac{۱}{با} \right) = \frac{لا}{ن} \frac{ما}{ن}$$

یعنی  $لا + ما + ن = ن$  ..... (۲)

[طریقہ دیگر - خط مستقیم کی مساوات سے  $\frac{(ل + لا + ن)}{۲} =$  پس ناقص کی مساوات  $ب' لا' + لا' ما' = لا' ب' میں$  مکی یہ قیمت درج کرنے سے  
 $ب' م' لا' + لا' (ل + لا + ن) = لا' ب' م'$   
یعنی  $(ب' م' + لا' (ل + لا + ن) = لا' (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))$   
 $\frac{۲ - لا' (ل + لا + ن) + لا' (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))}{۲ (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))} =$   
 $\frac{۲ (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))}{۲ (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))}$   
لائی دووں اہلیں مساوی ہونے کے لیے علامت جذر المربع کے اندر کا جملہ صفر ہونا چاہیے۔

یعنی  $لا' (ل + لا + ن) - (ب' م' + لا' (ل + لا + ن)) = ۰$   
 $لا' (ل + لا + ن) = (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))$   
نتیجہ صحیح - خط مستقیم لاجرم ط + ما جب ط - ع ناقص کو مس کر گیا اگر  
 $لا' (ل + لا + ن) = (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))$  ع ..... (۳)

(ز) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات -  
ناقص کے کسی نقطہ (لا' ما') پر کے ماس کی مساوات  $\frac{لا' لا'}{۲} + \frac{ما' لا'}{۲} = ۱$   
اس ماس پر جو خط عمود ہوگا اس کی مساوات  $\frac{لا' لا'}{۲} + \frac{ما' لا'}{۲} = ۰$  ج ہے  
جس میں ج کوئی مستقل ہے۔ اس خاص علی القوائم خط کے لیے جو نقطہ لا' ما' میں سے گزرتا ہے

مساوات  $\frac{لا' لا'}{۲} - \frac{ما' لا'}{۲} = ۰$  پس ج - ما' لا'  $(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲})$   
پس ناقص کے نقطہ (لا' ما') پر کے عمود کی مساوات  $\frac{لا' لا'}{۲} - \frac{ما' لا'}{۲} = ۰$  ج ہے  
یعنی  $لا' لا' - لا' ما' + ما' لا' = (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))$   
یعنی  $لا' لا' - لا' ما' = (ب' م' + لا' (ل + لا + ن))$  ج ہے  
جو بشکل  $\frac{لا' لا' - لا' ما'}{\frac{۱}{۲}} = \frac{ب' م' + لا' (ل + لا + ن)}{\frac{۱}{۲}}$  لکھی جاسکتی ہے۔

(ح) کسی نقطہ سے ناقص پر دو خط ہم اس کھینچے جاسکتے ہیں جو بلحاظ اس کے کہ نقطہ ناقص کے باہر، ناقص کے اوپر یا اُس کے اندر ہوں، حقیقی، منطقی یا خیالی ہوتے ہیں۔

فصل (۳) میں بتایا گیا ہے کہ خط مستقیم جس کی مساوات  $x = 0$  یا  $x = 1$  ہو، ناقص کو چھوتا ہے۔ مگر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔

خط (۱) نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرنے کے لیے  $x = 0$  یا  $x = 1$  ہوگا۔

یعنی (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) یا (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) - (۱، ۱) مساوات والا دو درجی مساوات ہے جس سے ناقص کے ان خطوط ہم اس کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتے ہیں۔ دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطہ (۱، ۱) میں سے دو ہی خط ہم اس کھینچے جاسکتے۔ اس مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطقی یا خیالی ہیں بلحاظ اس کے کہ (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) یا (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) ہو۔

منفی، صفر یا مثبت ہے۔ یا بانفاظ دیگر بلحاظ اس کے کہ  $\frac{x}{y} = 1$  یا  $\frac{x}{y} = 0$  مثبت، صفر یا منفی ہے۔ یعنی بلحاظ اس کے کہ نقطہ (۱، ۱) ناقص کے باہر ہے، اس کے اوپر ہے یا اس کے اندر واقع ہے۔

(ط) کسی نقطہ سے ناقص پر کھینچے ہوئے دو خط ہم اس کے

نقاط تماس میں سے گزرنے والے خط کی مساوات - (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) یا (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) - (۱، ۱) مساوات والا دو درجی مساوات ہے جس سے ناقص کے ان خطوط ہم اس کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (۱، ۱) میں سے گزرتے ہیں۔ دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطہ (۱، ۱) میں سے دو ہی خط ہم اس کھینچے جاسکتے۔ اس مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطقی یا خیالی ہیں بلحاظ اس کے کہ (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) یا (۱، ۱) - (۱، ۰) - (۰، ۱) ہو۔

(ح) (۱، ۱) اور (۱، ۰) پر کے خطوط ہم اس کی مساواتیں  $\frac{x}{y} = 1$  اور  $\frac{x}{y} = 0$  ہیں۔

لا ح + باک = ۱ ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (لا، ما) ان دونوں خطوں پر واقع ہے۔

پس لا ح + باک = ۱ ..... (۱) اور لا ح + باک = ۱ ..... (۲)

لیکن (۱) اور (۲) کے معائنہ سے واضح ہے کہ (ح، ک) اور (ح، ک) نقطہ دونوں

اس خط مستقیم پر واقع ہیں جس کی مساوات لا ح + باک = ۱ ..... (۳) ہے۔

لہذا مساوات (۳) نقطہ (لا، ما) سے نکھینچے ہوئے خطوط حماس کے تقاطع تاک

میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے۔

کسی نقطہ ف سے کسی ناقص تک نکھینچے ہوئے دو خطوط حماس کے تقاطع حماس کو

ملانے والے خط کو ف کا قطبی بلحاظ ناقص کہتے ہیں۔

(ی) اگر کسی ناقص کے لحاظ سے نقطہ ف کا قطبی نقطہ ق

میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔

اس کا ثبوت دائرہ اور مکافی والے مسئلہ کے ثبوت کے بالکل مشابہ ہے۔

(ک) ناقص کے باہر یگر علی القوائم دو خط حماس کے نقطہ

تقاطع کا طریق۔

خط مستقیم جس کی مساوات ما = مر لا + ما مر + با ہے ناقص کو مس

کرے گا مر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر ہم لا اور ما کو معلومہ تصور کریں تو یہ مساوات

ان خطوط حماس کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے

گزرتے ہیں۔

مساوات کو منطبق بنانے سے وہ مر (لا) - مر (لا) - ۲ مر لا + ما - با = ۰

ہو جاتی ہے۔

فرض کرو اس مساوات کی اصلیں مر اور مر ہیں۔ خطوط حماس علی القوائم ہونگے اگر

مر - ۱ = ۱ پس  $\frac{ما - با}{لا - لا} = ۱$  یعنی لا + ما = لا + با





نقطہ ف جو امدادی دائرہ پر واقع ہے ناقص کے نقطہ ف کا متناظر منظر ہوتا ہے  
اگر زاویہ  $\angle ج ف ک$  سے مخاطب کریں تو ف کے محدود  $\angle ج ف ک$  اور  
 $\angle ب ف ک$  ہونگے اور ف کے محدود  $\angle ج ف ک$  اور  $\angle ب ف ک$  جب ف

(م) ناقص کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویے اگر

دیے جائیں تو ان کو ملانے والے خط کی مساوات۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویے ف اور ف ہیں  
پس ان نقطوں کے محدود  $\angle ج ف ک$  اور  $\angle ب ف ک$  جب ف ہیں  
اور ان کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\left| \begin{array}{c} \angle ج ف ک \\ \angle ب ف ک \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \angle ج ف ک \\ \angle ب ف ک \end{array} \right|$$

مقطعہ کو پھیلانے سے  $\frac{لا}{ج ف ک} - جب ف ک + \frac{ب ف ک}{ج ف ک} = جب ف ک - جب ف ک = ۰$

اس مساوات کو جب  $\frac{۱}{۲} (ف ک - ف ک)$  پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{لا}{ج ف ک} - جب ف ک + \frac{ب ف ک}{ج ف ک} = \frac{۱}{۲} (ف ک + ف ک) = جب ف ک - جب ف ک = ۰ \dots (۱)$$

یہی مطلوبہ مساوات ہے۔

ف ک خارج مرکزی زاویہ والے نقطہ پر کی مساوات کے لیے مساوات (۱) میں ف ک = ف ک لکھو

$$تب \quad \frac{لا}{ج ف ک} - جب ف ک + \frac{ب ف ک}{ج ف ک} = ۱ \dots \dots \dots (۲)$$

مساوات (۱) سے واضح ہے اگر ناقص پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی

زاویوں کا جمل جمع مستقل اور ۲ کے مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر

ہمیشہ خط  $\frac{لا}{ج ف ک} - جب ف ک + \frac{ب ف ک}{ج ف ک} = ۱$  کے متوازی ہے۔ یعنی یہ وتر ہمیشہ

خارج مرکزی زاویہ کے واسطے نقطہ پر کے خط مماس کے متوازی ہے۔ اس کے

بالعکس ناقص کے متوازی دتروں کے کسی نظام میں کسی بھی

وتر کے سروں پر کے خارج مرکزی زاویوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔  
 (ن) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عمادگی مساوات اس نقطہ  
 کے خارج مرکزی زاویہ کی رقبوں میں۔  
 فرض کرو نقطہ ف کا خارج مرکزی زاویہ مذہ ہے۔ اس نقطہ پر کے خط مماس  
 کی مساوات

$$\frac{لا}{ر} \text{ جم ذہ} + \frac{ب}{ر} \text{ جب ذہ} = ا$$

اس پر خط لا جب ذہ - ما جم ذہ + ج = عمود ہوگا (جس میں ج  
 ایک مستقل ہے) چونکہ یہ عمود نقطہ ف میں سے گزرتا ہے اس لیے مساوات  
 میں لا اور ما کی قیمتیں (یعنی ا جم ذہ اور ب جب ذہ) درج کرنے سے

$$\frac{ا جم ذہ جب ذہ} {ب} - \frac{ب جب ذہ جم ذہ} {ر} + ج = ۰$$

$$\text{پس ج} = - \frac{(ا - ب) جب ذہ جم ذہ} {ر}$$

$$\therefore \frac{لا جب ذہ} {ب} - \frac{ما جم ذہ} {ر} - \frac{(ا - ب) جب ذہ جم ذہ} {ر} = ۰$$

$$\text{یعنی } لا جب ذہ - ب ما جم ذہ - (ا - ب) جب ذہ جم ذہ = ۰$$

$$\text{لہذا } \frac{لا}{جم ذہ} - \frac{ب ما}{جب ذہ} = ا - ب$$

(س) ناقص کے خارج مرکزی زاویوں ذہ ذہ والے

نقطوں پر کے خطوط مماس کے نقطہ تقاطع کے متحدہ۔  
 فرض کرو کہ اس نقطہ کے متحدہ لا، ما ہیں۔ چونکہ ذہ، ذہ خارج مرکزی

زاویوں کے نقطوں کو ملائے والا وتر نقطہ لا، ما کا قطبی ہے لہذا اس کی مساوات

$$\frac{لا لا}{و} = \frac{ما ما}{ب} + ۱ = ۰$$

لیکن (م) کی مساوات (۱) یعنی  $\frac{لا}{و}$  جم  $\frac{۱}{۲}$  (فہ + فہ) +  $\frac{۱}{۲}$  جب  $\frac{۱}{۲}$  (فہ + فہ) = جم  $\frac{۱}{۲}$  (فہ - فہ) بھی اسی قطبی کی مساوات ہے۔

$$\text{پس } \frac{لا}{و} = \frac{جم فہ - جب فہ}{جم فہ - جب فہ} = \frac{ما}{ب}$$

$$\text{لہذا } \frac{لا}{و} = \frac{جم \frac{۱}{۲} (فہ + فہ)}{جم \frac{۱}{۲} (فہ - فہ)} = \frac{ما}{ب}$$

[واضح ہے کہ فہ خارج مرکزی زاویہ والے نقطہ کے خط مماس کی مساوات  $\frac{لا}{و}$  جم فہ +  $\frac{۱}{۲}$  جب فہ - ۱ = ۰ میلا لا، ما کے عوض لا، ما لکھ کر اور اس طرح فہ زاویہ والے نقطہ کے مماس کی مساوات میں بھی یہی عمل کر کے  $\frac{لا}{و}$  اور  $\frac{ما}{ب}$  کی قیمتیں اخذ کی جاسکتی ہیں۔ طالب علم کو چاہیے بطور مشق اس کی تصدیق کرے۔]

فہ خارج مرکزی زاویوں والے نقطوں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کے متحد مساواتوں

$$\frac{لا}{و} = \frac{ب}{جم فہ} = \frac{۱}{۲} - ۱ = ۰ \text{ اور } \frac{ما}{ب} = \frac{ب}{جم فہ} = \frac{۱}{۲} - ۱ = ۰ \text{ کو لا اور ما کے لیے حل کرنے سے حسب ذیل برآمد ہوتے ہیں:}$$

$$لا = \frac{۱ - ۱}{جم فہ} = \frac{جم فہ}{جم فہ} = ۱$$

$$ما = \frac{۱ - ۱}{ب} = \frac{جم فہ}{ب}$$

طالب علم کو چاہیے اس کی تصدیق کرے۔

اب ہم ناقص کے چند ہندسی خواص ثابت کریں گے۔

شکل مسئلہ میں فرض کرو کہ نقطہ ف پر کا خط مماس لا اور ما کے متحدوں سے



یہاں عماد لاکے محور کو منقطع کرتا ہے وہاں ما = ۰۔ پس از روئے مساوات (۲)

$$\text{لا۔ لا۔} = \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲} \text{ لا یعنی لا} = \text{لا} (۱ - \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}) = \text{ز}^۲ \text{ لا۔} \therefore \text{ج گ} = \text{ز}^۲ \times \text{ج ن} \dots (جہ)$$

نیز چونکہ س گ = س ج + ج گ = کوز + ز^۲ لا اور گ س = وز - ز^۲ لا

$$\text{اس لیے س گ} = \frac{\text{وز} - \text{ز}^۲ \text{ لا}}{\text{وز} - \text{ز}^۲ \text{ لا}} = \frac{\text{وز} + \text{ز}^۲ \text{ لا}}{\text{وز} - \text{ز}^۲ \text{ لا}} = \frac{\text{س ف}}{\text{س ف}}$$

پس ف گ زاویہ س ف س کی تنصیف کرتا ہے ..... (ضہ)

$$\text{چونکہ ف گ}^۲ = \text{گ ن}^۲ + \text{ن ف}^۲ = (\text{ج ن} - \text{ج گ})^۲ + \text{ن ف}^۲$$

$$\text{پس ف گ}^۲ = \text{ما}^۲ + \text{لا}^۲ (۱ - \frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^۲}) \text{ یعنی ف گ}^۲ = \text{ب}^۲ + \frac{\text{لا}^۲}{\frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲}} + \frac{\text{لا}^۲}{\frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲}}$$

$$\text{اسی طرح ف گ}^۲ = \text{وا}^۲ + \frac{\text{لا}^۲}{\frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲}} + \frac{\text{لا}^۲}{\frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲}}$$

$$\text{اور ف و} = \text{ک ج} = \frac{۱}{\frac{\text{ا}^۲}{\text{ب}^۲} + \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲}}$$

$$\therefore \text{ف و} \times \text{ف گ} = \text{ب}^۲ \text{ اور ف و} \times \text{ف گ} = \text{وا}^۲ \dots \dots (صہ)$$

خط مستقیم جس کی مساوات ما = مر لا + مر^۲ + مر^۲ + مر^۲ + مر^۲ + مر^۲ ..... (۳) ہے ناقص کو مکمل کر لیا مر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔

پس اگر س س س نے ماسکوں سے خط (۳) پر ڈالے ہوئے عمود ہوں تو

$$\text{س س} = \frac{\text{مر}^۲ + \text{وا}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲}{\text{مر} + ۱} \text{ اور س س} = \frac{\text{مر}^۲ + \text{وا}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲}{\text{مر} + ۱}$$

$$\therefore \text{س س} \times \text{س س} = \frac{\text{وا}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲ + \text{مر}^۲}{\text{مر} + ۱} = \text{ب}^۲ \dots \dots (ثہ)$$

س میں سے خط (۳) پر عمود وار گزرنے والے خط کی مساوات مر ما + لا + وز = ۰ ..... (۴)

(اس لیے کہ یہ مساوات مر ما + لا + مستقل = ۰ ہے اور چونکہ س کے مجدد۔ وز

اور صفر ہیں۔ لہذا مستقل کی قیمت ۱۰ ہے) خطوط (۳) اور (۴) کے نقطہ تقاطع سے کا طریق معلوم کرنے کے لیے ان دونوں مساواتوں میں سے ہر کو سا قسط کرنا چاہیے۔ یہ مساواتیں شکل ذیل لکھی جاسکتی ہیں۔

$$۱۰ - ۱۱ = ۱۱ - ۱۱$$

$$\text{پس } (۱۰ - ۱۱) = ۱۱ - ۱۱ \text{ اور } (۱۱ - ۱۱) = ۱۱ - ۱۱$$

ان دونوں مساواتوں کو جمع کرنے سے (۱۰ + ۱۱) = (۱۱ + ۱۱) + (۱۱ - ۱۱)

$$= (۱۱ + ۱۱)$$

یعنی (۱۰ + ۱۱) = ۱۱ پس سے کا طریق امدادی دائرہ ہے ..... (یہ) اگر خط (۳) پر س سے عمود سن گزرا جسا تا تو سن کے لیے بھی یہی نتیجہ برآمد ہوتا۔

(ع) فرض کرو ف کوئی سا ایک نقطہ ہے اور خط ق جو لا اور ما کے محوروں سے ت اور تہ نقطوں پر ملتا ہے، ت کا قطبی ہے۔ س سے اس سے ج ک اور ف خط ق ق پر عمود وارکھینچو۔ فرض کرو ف ط محوروں سے گ، گ میں ملتا ہے۔ تب اگر ت کے محدود لا، ما ہوں تو ق ق کی مساوات

$$\frac{۱۱}{۱۱} + \frac{۱۱}{۱۱} = ۱۱ \dots \dots (۱) \text{ ہوگی}$$

اور اس لیے خط ف ط گ کی مساوات  $\frac{۱۱}{۱۱} = \frac{۱۱}{۱۱} \dots \dots (۲)$  ہوگی

ان دونوں مساواتوں کے ذریعہ سابقہ فصل کے بعینہ ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$(۴) \text{ ج ن } \times \text{ ج ت} = \text{ج لا} \quad (۵) \text{ ن ف } \times \text{ ج تہ} = \text{ج ب}$$

$$(۶) \text{ ج گ} = \text{زا ج ن اور (ضہ) ک ج } \times \text{ ف گ} = \text{ب}$$

۶۲ (۱) - ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے



اس رابطہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ تمام وتر جو خط  $MA = MR$  کے متوازی ہیں خط  $MA = MR$  ان کی تنصیف کرتا ہے۔

پس اگر ناقص کا ایک قطر کسی دوسرے قطر کے متوازی و تروں کی تنصیف کرتا ہے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی و تروں کی تنصیف کرے گا۔

تحریریت۔ دو قطر مزدوج کہلاتے ہیں جبکہ ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی و تروں کی تنصیف کرتا ہے۔

کسی قطر کے سرے پر کا خط حماس اس قطر سے تنصیف پانے والے و تروں کا متوازی ہوتا ہے۔

متوازی و تروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ناقص کے ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ اس قطر کے سروں پر کے متوازی خطوط حماس بھی اس متوازی و تروں کے نظام کے ارکان سمجھے جاسکتے ہیں۔ اس لیے کہ یہ فی الحقیقت وتر ہی ہیں جو دو منطبق نقطوں میں ناقص سے ملتے ہیں۔

مثال (۱)۔ ناقص کے ایک قطر پر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج قطر کا متوازی ہے۔

اس لیے کہ (لا، لا) میں سے گزرنے والا قطر لا، لا۔ ما، لا = ۰ ہے

اور (لا، لا) کا قطبی  $\frac{لا، لا}{لا، لا} + \frac{ما، لا}{لا، لا} = ۰$  ہے۔ یہ دونوں مساواتیں مزدوج

قطروں کی شرط مر = ۰ کو پورا کرتی ہیں اس لیے کہ مر =  $\frac{لا، لا}{لا، لا}$  اور مر =  $\frac{ما، لا}{لا، لا}$ ۔ پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اگر (لا، لا) ناقص کے کسی وتر کا وسطی نقطہ ہے تو وہ وتر (لا، لا) کے قطبی کا متوازی ہے۔

پس (لا، لا) وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات  $\frac{لا، لا}{لا، لا} + \frac{ما، لا}{لا، لا} = ۰$  ہے

مثال (۲)۔ اگر کسی ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں تو ان کے وسطی نقطے ایک دوسرے ناقص پر پڑھیں گے۔



کیونکہ ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ (لا، ما) وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات  $\frac{لا(لا-لا)}{۲} + \frac{ما(ما-ما)}{۲} = ۰$  ہے۔

اگر یہ وتر دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) میں سے گزرتا ہے تو  $\frac{لا(لا-لا)}{۲} + \frac{ما(ما-ما)}{۲} = ۰$ ۔

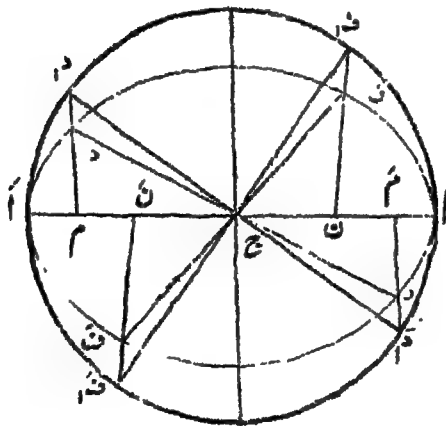
لہذا نقطہ (لا، ما) ناقص  $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - \frac{ھ}{۲} - \frac{ک}{۲} = ۰$  پر واقع ہے۔

(ب) شکل ۳۴ میں فرض کرو ف، د ایک جوڑ مزدوج قطروں کے سرے ہیں۔ فرض کرو ف کے محدود لا، ما ہیں اور د کے محدود لا، ما ج، ف اور ج، د کی

مساواتیں  $\frac{لا}{۲} = \frac{ما}{۲}$  اور  $\frac{لا}{۲} = \frac{ما}{۲}$  ہیں۔

پس (۱) کی مساوات (۳) کی رو سے  $\frac{لا}{۲} = \frac{ما}{۲}$ ۔

∴  $\frac{لا}{۲} = \frac{ما}{۲} + \frac{لا}{۲} = ۰$  ..... (۱)



شکل ۳۴

اگر ف، د بالترتیب ف اور د کے خارج مرکزی زاویے ہوں تو

لا = وجہ ف، ما = جہ ف، اور لا = وجہ ف، اور ما = جہ ف۔

ان قیمتوں کو مساوی (۱) میں درج کرنے سے حجم ۱، حجم ۲ + حجم ۱، جب ۱، =

یعنی مس قدر = - مم قدر  $\therefore \frac{\pi}{r} - \text{قدر} = - \text{قدر}$  پس قدر  $\sim$  قدر  $= \frac{\pi}{r}$

لہذا ناقص کے دو ضرر دو ج قطروں کے سروں پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویوں کا تفاوت ایک زاویہ قائمہ ہے۔  
اگر ف ج ف، د ج د ناقص کے قطروں ف ج ف، د ج د کے متناظر امدادی دائرے کے قطر ہیں تو ف ج ف، اور د ج د باہر گیر علی القوائم ہونگے۔ اس لیے د اور ف کے محدود فوراً ف اور ف کے محدودوں کی قوسوں میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔

(ج) دو مزدوج نصف قطروں کے مربعوں کا

حاصل جمع مستقل اور  $\frac{1}{2}$  کے مساوی ہے۔

فرض کرو  $\phi$  اور  $\delta$  ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں پر کے نقطے ہیں۔ اگر  $\phi$  کا خارج مرکزی زاویہ  $\delta$  مانا جائے تو  $\delta$  کا خارج مرکزی زاویہ  $\delta \pm \frac{\pi}{2}$  ہوگا۔

ف کے محدود ارجم ذہب ذہونگے اور دکے محدود ارجم (ف  $\pm$   $\frac{\pi}{2}$ ) ب جب (ف  $\pm$   $\frac{\pi}{2}$ )

ج ذ = ز + ج ذ + ب ج ذ

اور ج د =  $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right)$

$$\therefore ج\text{ فَا} + ج\text{ دَا} = ج\text{ اُ} + ج\text{ بَا}$$

(د) ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پر مس کرتے والے

متوازی الاضلاع کا رقبہ مستقل اور  $m$  اور  $n$  کے مساوی ہے۔

فرض کر دو ج 'ف'، د ج 'د' ناقص کے مزدوج قطر ہیں جو متوازی الاضلاع

ناقص کو ف، ت، د، ذ پر مسمکتا ہے اس کا قہم ج، ف، لا، ج، و جب ف ج د یا م ج د یا ج ک ہے جس میں ج ک مرکز ج سے ف پر کے خط ماس پر گرایا ہوا

عمود ہے (دیکھو شکل ۱۲۷)۔

اگر ف کا خارج مرکزی زاویہ نہ ہو تو د کا خارج مرکزی زاویہ نہ  $\pm \frac{\pi}{4}$  ہوگا۔

$$\therefore \text{ج د} = \text{ا'جم} (\text{ف} \pm \frac{\pi}{4}) + \text{ب'جب} (\text{ف} \pm \frac{\pi}{4})$$

یعنی ج د' = ا'جب ف + ب'جم ف ..... (۱)

اور ف پر کے خط مماس کی مساوات  $\frac{\pi}{2}$  جم ف +  $\frac{\pi}{2}$  جب ف = ا

$$\therefore \text{ج ک} = \frac{1}{\text{جم ف} + \frac{\pi}{2} \text{جب ف}} = \frac{1}{\text{ا'جب ف} + \text{ب'جم ف}} \dots \dots (۲)$$

پس (۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ ج د  $\times$  ج ک = ا ب لہذا ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پر تماس رکھنے والے متوازی الاضلاع کا مخرج م ا ب کے مساوی ہے۔

(۵) اگر ناقص کے دو مزدوج قطروں ج ف، ج د کے طول بالترتیب ل، ل' ہوں تو چونکہ ج ک = ج ف جب  $>$  ج ف ک = ل جب طہ جس میں طہ = زاویہ ف ج د (یعنی مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ) اس لیے ل، ل' جب طہ = ا ب جس سے ظاہر ہے کہ جب طہ اقل ہے جبکہ ل، ل' اعظم ہے۔

لیکن دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ( $= \text{ل} + \text{ل}'$ ) ہے۔ لہذا ل، ل' کی قیمت اعظم ہوگی جبکہ یہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔ ہیں وجہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ حادہ اقل ہوتا ہے جبکہ یہ مزدوج قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

(۶) فرض کرو ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں ف، د کے خارج مرکزی زاویے بالترتیب ف اور ف  $\pm \frac{\pi}{4}$  ہیں۔

$$\text{تب ج ف} = \text{ا'جم ف} + \text{ب'جب ف اور ج د} = \text{ا'جب ف} + \text{ب'جم ف}$$

$$\therefore \text{ج ف} - \text{ج د} = (\text{ل}' - \text{ل}) \text{جم ف}$$

پس ج ف = ج د جبکہ ف  $\frac{\pi}{4}$  یا  $\frac{3\pi}{4}$  اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی

مساواتیں  $\frac{1}{r} = \pm \frac{1}{p}$  ہیں (کیونکہ حجم  $\frac{\pi}{p} =$  جب  $\frac{\pi}{p}$ )  
 پس ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کی سمتیں اور اس کے  
 محوروں کے سروں پر کے محاسوں سے بنے ہوئے مستطیل کے وتروں  
 کی سمتیں باہم دیگر منطبق ہیں۔

(۲) تعریف۔ ناقص پر کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں  
 کو ملانے والے دو خطوط مستقیم کیلیں اوتار کہلاتے ہیں۔  
 ناقص کے کوئی سے دو تکمیلی وتر ایک جوڑ مزدوج قطروں  
 کے متوازی ہوتے ہیں۔

ناقص پر کوئی نقطہ ق فرض کرو اور اس کو قطر ف ج کے سروں ف  
 اور ف سے ملاؤ۔ اگر و اور و بالترتیب ق ف اور ق ف کے وسطی نقطہ  
 ہیں تو ج و اور ج و مزدوج ہیں اس لیے کہ یہ ایک دوسرے کے متوازی وتروں  
 کی تنصیف کرتے ہیں اور ج و اور ج و بالترتیب ق ف اور ق ف کے متوازی ہیں۔  
 پس ق ف اور ق ف ایک جوڑ مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

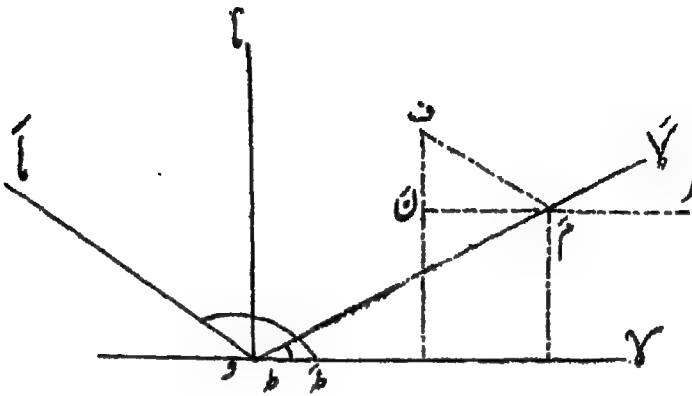
۴۳۔ ایک جوڑ مزدوج قطروں کو محور مان کر باسانی ناقص کی مساوات  
 حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کے لیے ہمیں علی القوائم محور والے محد دوں کو دیے ہوئے  
 دوسرے محور والے محد دوں کی رقموں میں ظاہر کرنے کی ضرورت ہے۔

(۱) فرض کرو شکل ۳۵ میں وکلا، و ما علی القوائم محور ہیں اور  
 وکلا اور و ما جدید محور ہیں جن کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔

اگر وکلا وکلا = طہ اور وکلا وکلا = طہ تو سہ = طہ - طہ ہے۔

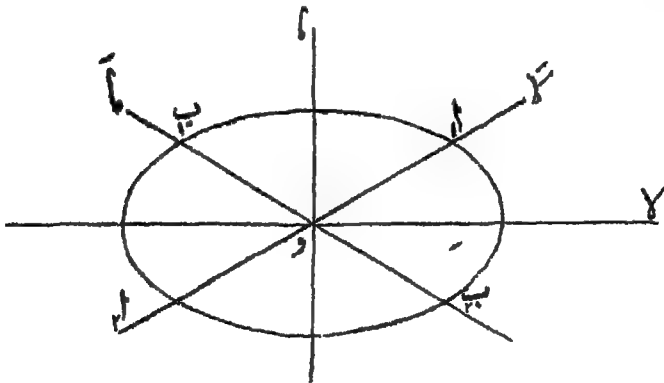
کسی نقطہ ف کے محد و اول الذکر محوروں کے حوالہ سے لا، ما فرض کرو اور  
 آخر الذکر کے حوالہ سے لا اور ما۔

خط ف م محور و ما کے متوازی کھینچو ف م محور و ما کے متوازی م م  
 محور و ما کے متوازی اور م م محور وکلا کے متوازی۔ تب > م م = طہ



شکل ۳۳

چونکہ و م = و ن + ن م = و ن + م ن = و م جم ط + م ن جم ط  
 اور م ف = م ن + ن ف = ن م + ن ف = و م جم ط + م ن جم ط  
 لہذا لا = لاجم ط + ماجم ط اور ما = لاجب ط + ماجب ط  
 (ب) فرض کرو شکل ۳۳ میں ا، آ اور ب بہ ناقص کے مزدوج  
 قطر ہیں اور یہ محور مانے جاتے ہیں۔



شکل ۳۴

ولا، و ما کے حوالہ سے ناقص کی مساوات  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱ \dots\dots (۱)$  ہے  
 $لا > لا و لا = ط$  اور  $ما > ما و لا = ط$

پس  $لا = لا + جم ط + ما جم ط$  اور  $ما = لا جب ط + ما جب ط$  ..... (۲)  
 ۶۲ - (۱) کی مساوات (۳) سے مس ط مس ط =  $\frac{ما}{۲} - \frac{لا}{۱}$

یعنی  $\frac{جب ط جب ط}{۲} + \frac{جم ط جم ط}{۱} = ۰ \dots\dots (۳)$

مساوات (۱) میں لا اور ما کی نئی قیمتیں درج کر کے ترتیب دینے سے

$$\left(\frac{جم ط}{۱} + \frac{جب ط}{۲}\right) لا + \left(\frac{جم ط جب ط}{۲} + \frac{لا لا}{۱}\right) ما = ۱$$

$$(۳) کی رو سے لا ما کا سر صفر ہے پس \left(\frac{جم ط جب ط}{۲} + \frac{لا لا}{۱}\right) لا + \left(\frac{جم ط جب ط}{۲} + \frac{لا لا}{۱}\right) ما = ۱$$

اس مساوات میں ما کو صفر لکھنے سے نصف قطر و لا کی قیمت  $\frac{۱}{\frac{جم ط جب ط}{۲} + \frac{لا لا}{۱}}$  برآمد ہوتی ہے۔

جس کو ہم وے سے تعبیر کریں گے۔ اسی طرح لا کو صفر لکھنے سے وب کی قیمت  $\frac{۱}{\frac{جم ط جب ط}{۲} + \frac{لا لا}{۱}}$  ہوتی ہے۔

اگر اس کو بے سے تعبیر کریں تو ناقص کی مساوات مزدوج قطروں کے حوالہ سے

$$\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱ \text{ ہے}$$

پس  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱$  ناقص کی مساوات ہے جب کہ نصف طول لا اور بے والے مزدوج

قطر کے حوالہ سے محور مانے جاتے ہیں۔

مثال (۱) ناقص کے محور اعظم کے سروں پر کے خطوط ماس ناقص کے کوئی

سے خط ماس سے ت اور ت نقطوں پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر

ت سے ماسوں میں سے گزرے گا۔

فرض کرو ناقص کے کسی نقطہ کے محدود لا، ما ہیں اس نقطہ پر کے خط ماس کی

مساوات  $\frac{لا}{ر} + \frac{ما}{ب} - ۱ = ۰$  ہے یہ خط ماس خط لا = ر سے جس مقام پر  
 ملتا ہے وہاں ما =  $\frac{ب}{ا} - (۱ - \frac{لا}{ر})$  اور خط لا = ر سے جس مقام پر ملتا ہے  
 وہاں ما =  $\frac{ب}{ا} - (\frac{لا}{ر} + ۱)$

پس دائرہ جس کا قطر ت ہے (لا - ر) (لا + ر) + (ا -  $\frac{ب}{ا}$ ) (ا -  $\frac{ب}{ا}$ ) - (ا -  $\frac{ب}{ا}$ ) (ا +  $\frac{ب}{ا}$ ) =  
 جو خط ما = کو اسی جگہ قطع کرتا ہے جہاں لا - ر +  $\frac{ب}{ا}$  (ا -  $\frac{لا}{ر}$ ) = ۰ ہے۔  
 چونکہ  $\frac{لا}{ر} + \frac{ب}{ا} = ۱$  اس لیے یہ مقام تقاطع لا - ر +  $\frac{ب}{ا} = ۰$  ہیں یعنی  
 مانگے ہیں۔  
 مثال (۲) اگر ناقص کوئی سا مزدوج قطروں کا جوڑ نقطہ ف پر کے  
 خط ماس کو ت اور ت نقطوں میں قطع کرے تو ثابت کرو کہ ت ف × ف ت = ج د  
 جس میں ج د قطر ج ف کا مزدوج ہے۔ ج ف ج د کو لا اور ما کے محور قرار دو،  
 تب ناقص کی مساوات  $\frac{لا}{ر} + \frac{ما}{ب} = ۱$  ہوگی۔

ف یعنی نقطہ (ر) پر کے خط ماس کی مساوات لا = ر ہے۔  
 اگر ما = مر لا = ما = مر لا مزدوج قطروں کے کسی جوڑ کی مساواتیں ہوں تو  
 مر = -  $\frac{ب}{ا}$  لیکن ف ت = مر اور ف ت = مر لا ف ت × ف ت = مر لا  
 ف ت × ف ت = ب

مثال (۳) ثابت کرو کہ اگر کسی ناقص پر کے دو نقطوں ف، ف سے اُس  
 کے محور اعظم اور پر عماد ف، ف اور ف، ف گرائے جائیں تو

$$\frac{ان \times ان}{ان \times ان} = \frac{ان \times ان}{ان \times ان}$$

فرض کرو ف کے محدود (لا، ما) ہیں اور ف کے محدود (لا، ما) -

$$\text{تب } 1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2} \text{ اور } 1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2}$$

$$\text{پس } \frac{(\text{لا} - \text{ر})(\text{لا} + \text{ر})}{(\text{لا} - \text{ر})(\text{لا} + \text{ر})} = \frac{\text{لا}^2 - \text{ر}^2}{\text{لا}^2 - \text{ر}^2} = \frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2}$$

لیکن ما = ن ف، ل + لا = آج + ج ن، آن جس میں ج ناقص کا مرکز ہے  
ل - لا = ج - آج ن، ن آ = ما = ن ف، ل + لا = آن اور ل - لا = ن آ

$$\text{پس } \frac{\text{آن} \times \text{ن آ}}{\text{آن} \times \text{ن آ}} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ما}^2}$$

## نویں باب کی مثالیں

(۱) اگر کسی ناقص کے مرکز پر کا عماد محور اعظم کا چوتھائی طول رکھتا ہے تو ناقص کی مساوات اور اس کا خروج مرکز دریافت کرو۔

(۲) لا + ۳ ما = ۱ دیا جاتا ہے اس کے نصف محور ماسکے اور مرتب دریافت کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ ناقص میں (۱) محور اقل کا نصف اس اور اس کا ایک اوسط تناسب ہے۔ (ب) ماسکے پر کا عماد اس اور اس کا ایک موسیقی اوسط ہے۔ (۲) ناقص کا محور اعظم ہے اور اس میں اس کے ماسکے ہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ناقص  $\frac{\text{لا}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2}$  کے ایسے خطوط ماس کی مساوتیں جو محوروں پر مساوی مقطوعے بناتی ہیں۔

(۵) اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ف کے ماسکی فاصلے س ف، س ف ہوں،  
 $\text{لا} \pm \text{ما} \pm \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = ۰$  ہیں۔



ج ناقص کا مرکز ہو اور ج د قطریں بناؤ کہ س ف س ف ج د  
(۶) ناقص کا محور اعظم ا ج ا ہے۔ ناقص پر کے کسی نقطہ ف پر کا  
خط ماس خط ماس سے نقطہ ی پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ  
ج ی خط ا ف کا متوازی ہے۔

(۷) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوط مستقیم سے اس کے فاصلوں  
کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک ناقص ہے۔ اور  
بتاؤ کہ ان خطوط کے درمیانی زاویہ کی رقبوں میں ناقص کا خروج مرکز کیا ہے۔

(۸) ف ق ناقص پر دو ثابت نقطے ہیں اور س اس پر کا کوئی ایک اور  
نقطہ ہے۔ دو خطوط ف س، ق س کے وسطی نقطے ہیں اور و گ، و گ، الترتیب  
ف س، ق س پر عمود ہیں اور محور سے گ، گ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ گ گ  
مستقل ہے۔

(۹) ایک دیے ہوئے ماسک اور اس کے متناظر مرتب کے ناقصوں کا ایک سلسلہ  
کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے اقل محوروں کے سروں کا طریق ایک مکانی ہے۔

(۱۰) ف ن ف ایک ناقص کا دوہرا معین ہے اور ق متعینی پر کوئی سا ایک  
نقطہ ہے۔ اگر ق ف ق ف محور اعظم سے علی الترتیب م، م نقطوں میں ملے  
تو ج م  $\times$  ج م = ج ا

(۱۱) ناقص کے ماسکوں میں سے گزرتے ہوئے مزدوج قطروں کے ایک جوڑ  
کے بالترتیب علی القوام خطوط کھینچے جاتے ہیں جو نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں ثابت کرو  
کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

(۱۲) اگر ف د مزدوج قطروں کے سرے ہیں اور نقطہ ف پر کا خط ماس  
محور اعظم کو نقطہ ت میں منقطع کرتا ہے اور نقطہ د پر کا ماس محور اقل کو ت میں منقطع کرتا  
ہے تو بتاؤ کہ ت مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک قطر کے متوازی ہوگا۔

(۱۳) ثابت کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کا عماد خط ماس پر مرکز اور  
دونوں ماسکوں پر سے ڈالے ہوئے عمودوں کا چوتھا متناسب ہے۔

(۱۴) ف ن ف ناقص کا ایک دوہرا معین ہے اور ف پر کا عماد

ج ف سے نقطہ و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ و کا طریق ایک ناقص ہے۔  
 (۱۵) اگر ناقص کے کسی نقطہ ف پر کا عمود محور اعظم کو نقطہ گ پر قطع کرے  
 تو بتاؤ کہ ف کی مختلف وضعوں کے لیے ف گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک ناقص ہوگا۔  
 (۱۶) ناقص کے کوئی سے دو قطروں کے دوسروں کو ملانے والا خط، ان  
 کے مزدوج قطروں کے دوسروں کو ملانے والے خط کا یا متوازی ہے یا مزدوج۔

(۱۷) اگر ناقص کے تین نقطوں پر جن کے خارج مرکزی زاویے ف، ف، ف ہیں  
 ہیں خطوط ماس کھینچے جائیں تو ان خطوط سے جو مثلث بنیگا اس کے بیرونی دائرہ کا قطر

$$\frac{\text{قط} \text{ فہ} - \text{قط} \text{ فہ}}{۲} - \frac{\text{قط} \text{ فہ} - \text{قط} \text{ فہ}}{۲} - \frac{\text{قط} \text{ فہ} - \text{قط} \text{ فہ}}{۲} \text{ ہے}$$

جس میں ط، ط، ط ناقص کے ان قطروں کا طول ہے جو مثلث کے ضلعوں کے  
 متوازی ہیں اور اب ناقص کے نصف محور ہیں۔

(۱۸) اگر ف، ق ناقص کے باہر دیگر علی القوائم خطوط ماس کے تقاطع ماس  
 ہیں اور ف، ق امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطہ ہیں تو ثابت کرو کہ ج، ف، ج ق تھیں  
 کے مزدوج قطر ہیں۔

(۱۹) دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اس نقطہ کا طریق  
 دریافت کرو جس کی حرکت میں اس سے ان دائروں تک کھینچے ہوئے خطوط ماس  
 کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔

(۲۰) ناقص پر دو علی القوائم خطوط ماس کھینچے جاتے ہیں۔ وتر ماس کے  
 وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

(۲۱) ناقص کے مستقل طول کے تمام دزروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو۔

(۲۲) ناقص کے کوئی سے دو قطروں کے سروں پر کے خطوط ماس سے پیرا  
 ہونے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ، تقاطع ماس کو ملانے سے تیار ہونے والے  
 متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس بدلتا ہے۔

(۲۳) اگر ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں سے عماد کھینچے جائیں تو ان کے  
 نقطہ تقاطع میں سے محور اعظم کے متوازی کھینچا ہوا خط اس وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

## دسواں باب

### خط زائد کی مساواتیں

۶۳۔ تعریف۔ جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے (جو ماسکہ کہلاتا ہے) ایک ثابت خط مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جو کہ مرتب کہلاتا ہے) اکائی سے زائد مستقل نسبت رکھتا ہے تو اس نقطہ کا طریق خط زائد ہے۔

(۱) خط زائد کی مساوات۔ فرض کرو کہ شکل ۳ میں س ماسکہ اور ی م مرتب ہے۔ س ی مرتب پر عمود کھینچو۔ ی س کو نقطہ ۱ پر اس طرح تقسیم کرو کہ  $\frac{س ۱}{۱ ی} = \frac{۱}{۱}$  جس میں ۱ ایک سے زائد عدد ہے۔ تب ۱ منحنی پر کا ایک نقطہ ہوگا۔

س ی کو آگے بڑھانے سے ایک دوسرا نقطہ ۲ ایسا ملے گا جس کے لیے  $\frac{س ۲}{۲ ی} = \frac{۲}{۱}$  ج کو ۲ کا وسطی نقطہ مانو اور طول ۲ کو ۱

$$تب س ۱ = ۱ \times ۱ اور س ۲ = ۲ \times ۱$$

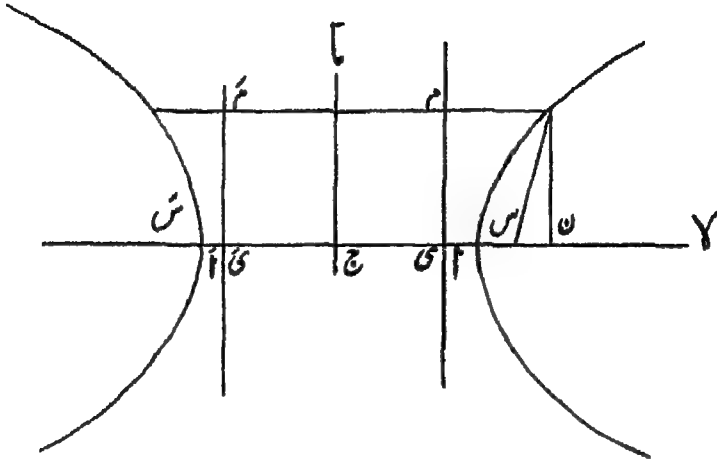
$$س ۱ + ۱ = س ۲ \quad (۱ ی + ۱ ی)$$

پس ۲ س ج = ۲ ز ۱ ج : ج س = ز ۱ ج ..... (۱)

$$نیز س ۲ - س ۱ = ۱ = ز (۱ ی - ۱ ی)$$

$$یعنی ۱ = ز (۱۱ - ۱۲ ی)$$

$$\therefore \text{اج} = \text{ز} \times \text{ی ج یعنی ج ی} = \frac{1}{\text{ز}} \dots\dots\dots (۲)$$



شکل ۳۷

ج کو مبدا فرض کرو، ج ا کو لا کا محور مانو اور ج ما کو جو ا پر علی القوائم ہے  
ما کا محور۔ فرض کرو ف منحنی پر کا کوئی ساقطہ ہے اور اس کے محدودا ما ہیں

$$\text{تب س ف}^2 = \text{ز}^2 \times \text{ف م}^2 \text{ یعنی س ن}^2 + \text{ن ف}^2 = \text{ز}^2 \times \text{ی ن}^2$$

$$\text{لیکن س ن} = \text{ج ن} - \text{ج س} = \text{لا} - \text{ا} \times \text{ز}$$

$$\text{اور ی ن} = \text{ج ن} - \text{ج ی} = \text{لا} - \frac{1}{\text{ز}}$$

$$\therefore (\text{لا} - \text{ا} \times \text{ز})^2 = \text{ما}^2 + (\text{لا} - \frac{1}{\text{ز}})^2$$

$$\text{یعنی ما}^2 + \text{لا}^2 (1 - \text{ز})^2 = \text{ا}^2 (1 - \text{ز})^2 + \frac{\text{لا}^2}{\text{ز}^2} \text{ لہذا } \dots\dots\dots (۳)$$

چونکہ ز کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے اس لیے  $\text{ا}^2 (1 - \text{ز})^2$  منفی ہے۔

پس اگر  $\text{ا}^2 (1 - \text{ز})^2$  کے عوض - ب لکھا جائے تو منحنی کی مساوات

$$\dots\dots\dots (۴) = \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} - \frac{\text{ا}^2}{\text{ز}^2} \text{ ہو جاتی ہے۔}$$

قطع زائد کے وتر خاص سے مراد وہ وتر ہے جو اس کے ماسکے میں سے مرتب کے

جب  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  اس لیے کہ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2})$   
پس نصف وتر خاص کا طول  $\frac{1}{2}$  ہے۔

مسادات (۴) میں لا کی قیمت ۱۰ سے کم نہیں ہو سکتی ورنہ ما منفی مقدار ہوگی۔ جس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ قطع زائد کا کوئی حصہ لا = - ۱ اور لا = ۱ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

در بیان واضح نہیں ہو سکتا۔  
اگر لاکھ قیمت سے زائد ہو تو ما<sup>۲</sup> قیمت مقدار ہوگی اور لاکھ کسی خاص  
قیمت کے لیے ماکہ دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہونگی۔ لہذا لاکھ  
محور منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں پر تقسیم کرتا ہے۔

محور منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں پر تقسیم کرتا ہے۔  
 ماکہ کسی بھی قیمت کے لیے لا اُشبہ ہے اور ماکہ کسی خاص قیمت کے لیے لا  
 دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہوں گی۔ پس ماکہ محور بھی منحنی کو دو مشابہ  
 اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر لا کے محور پر  
 س اور ی ایسے نقطے لیے جائیں کہ ج س = س ج اور ج ی = ی ج  
 فقط س بھی منحنی کا ایک ماسک ہوگا اور ی میں سے ج ی کے علی القوائم جو  
 خط کھینچا جائیگا اس ماسک کا متناظر مرتب ہوگا۔

اگر (لا، ما) کوئی سا ایک نقطہ ہے جو قطع زائد پر واقع ہے تو واضح ہے کہ نقطہ (- لا، ما) بھی اسی منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن مصرعہ بالا دو نقطہ مبدا میں سے گزرنے والے خط مستقیم پر واقع ہیں اور مبدا سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں۔ لہذا مبدا میں سے قطع زائد کا جی کوئی وتر کھینچا جاتا ہے مبدا اس کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے منحنی کا مرکز کہلاتا ہے۔

مسادات (۴) سے یہ بھی ہو رہا ہے کہ اگر لا کی قیمت ۱۰۰ سے زائد ہو تو ۱۰۰ ایک مثبت مقدار ہوگی اور جیسے جیسے لا کی قیمت بڑھتی جائیگی ویسے ۱۰۰ کی قیمت بھی بڑھتی جائیگی۔ اور لا اور ما کے اس طرح بڑھتے جانے کی کوئی حد یا انتہا نہیں ہے۔ بس اس منحنی کی عام شکل ایسی ہی ہے جیسے کہ شکل ۳۷ میں

بتائی گئی ہے۔ یعنی وہ دو نامتناہی بڑی شاخوں پر مشتمل ہے۔

۱۱ قطع زائد کا قاطع محور کہلاتا ہے۔ ۱۱ کے علی القوائم ج میں سے گزرنے والا خط منحنی سے کسی حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے۔ لیکن اگر اس خط پر ب اور ب قطع زائد کے نقطے لیے جائیں کہ  $ب ج = ج ب = ب$  تو خط ب ب مزدوج محور کہلاتا ہے۔

(ب) قطع زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی تعیین۔

نمٹل ۲۲ میں چکر م س ف = ز × ف م

لہذا س ف = ز × ی ن = ز (ج ن - ج ی) = ز (لا - لا) = ز × لا - لا  
اس طرح س ف = ز × م ف = ز (ج ن + ج ی) = ز (لا + لا) = ز × لا + لا  
پس س ف - س ف = ۲

(قبل ازیں نویں باب میں بتایا گیا تھا کہ قطع ناقص کے لیے س ف + س ف = ۲)

(ج) اگر مرکز کو قطب مان کر قطع زائد کی قطبی مساوات معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کی کارٹیزی مساوات  $\frac{۲}{۱} - \frac{۲}{۱} = ۱$  میں بجائے لا کے س ج م ط اور بجائے م کے س ج ب ط لکھنا چاہیے۔ تب

$$\frac{س ج م ط}{۱} - \frac{س ج ب ط}{۱} = ۱ \text{ یعنی } \frac{۱}{۱} = \frac{س ج م ط}{۱} - \frac{س ج ب ط}{۱} \dots (۱)$$

جس کو  $\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} - (\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱})$  س ج ب ط ... (۲) بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس مساوات کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ جب ط کی قیمت صفر ہوتی ہے تو  $\frac{۱}{۱}$  اعظم ہے۔ اور اس لیے س اقل ہے۔ جیسے جیسے ط بڑھتا جاتا ہے کسر  $\frac{۱}{۱}$  گھٹتی

ہے اور اس کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ جبکہ جب ط =  $\frac{۱}{۱}$  پس ط کی اس قیمت پر س نامتناہی بڑا ہوتا ہے۔ اگر جب ط کی قیمت  $\frac{۱}{۱}$  سے زیادہ

ہو تو  $\frac{۱}{۱}$  منفی مقدار ہوگی یعنی جو نیم قطری سمتی محور کے ساتھ جب ط  $\frac{۱}{۱}$  سے بڑھ کر زاویہ بناتا ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے۔

(د) قطع ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو نتائج اخذ کیے گئے تھے ان میں سے اکثر قطع زائد پر بھی صادق آتے ہیں۔ ان کے ثبوت کے لیے صرف ب<sup>۲</sup> کی علامت تبدیل کر دینا کافی ہے۔ بدین وجہ یہ نتائج یہاں محض قلمبند کیے جاتے ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ سابقہ باب کی متناظر دفعوں میں ان کا حوالہ دیکھ لے۔

(۱) خط م = م<sup>۱</sup> + م<sup>۲</sup> اور م<sup>۲</sup> - م<sup>۱</sup> = م کی جملہ قیمتوں کے لیے خط زائد کا خط ماسکس ہے۔

(۲) نقطہ (لا، ما) پر کے خط ماسکس کی مساوات  $\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ب} = ۱$  ہے۔

(۳) نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات  $\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ب} = ۱$  ہے۔

(۴) نقطہ (لا، ما) پر کے عمود کی مساوات  $\frac{لا}{لا} = \frac{ما - ب}{ب} = ۰$  ہے۔

(۵) خط ل + م = ن خط زائد کو مس کرے گا اگر ل<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup> م<sup>۲</sup> = ن<sup>۲</sup>

(۶) خط لاجم م + اجب م = ع منحنی کو مس کرے گا اگر ع<sup>۲</sup> - ل<sup>۲</sup> م<sup>۲</sup> = ب<sup>۲</sup> م<sup>۲</sup>

(۷) خط زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات ل<sup>۲</sup> + م<sup>۲</sup> = ل<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup> ہے۔ واضح ہے کہ

یہ مرتب دائرہ محض خیالی ہوتا ہے جبکہ ل کی قیمت ب سے کم ہو۔ اور صفر نہ ہو جاتا ہے جبکہ ل = ب

(۸) خط ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو ہندسی سائل ثابت کیے گئے تھے وہ خط ناقص پر بھی صادق آتے ہیں۔

(۹) خط م = م<sup>۱</sup> کے متوازی تمام دتروں کے وسطی نقطوں کا طریق  
م = م<sup>۱</sup> ہے جس میں م<sup>۲</sup> =  $\frac{ب^۲}{لا}$

(۱۰) خط م = م<sup>۱</sup> اور م<sup>۲</sup> = م<sup>۱</sup> اگر م<sup>۲</sup> =  $\frac{ب^۲}{لا}$  ہو تو  
یہ دونوں قطر منحنی سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فاصلوں یا مقطوعوں کی مساواتیں

$$لا^۲ = \left( \frac{ب^۲}{لا} - \frac{۱}{لا} \right) اور لا^۲ = \left( \frac{ب^۲}{لا} - \frac{۱}{لا} \right) = ۱ \text{ ہیں۔}$$

پہلی مساوات سے لا کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر م کی قیمت  $\frac{1}{2}$  سے کمتر ہو۔ اور دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر م کی قیمت  $\frac{1}{2}$  سے کمتر ہو۔ لیکن چونکہ م =  $\frac{1}{2}$  اس لیے م اور م' دونوں  $\frac{1}{2}$  سے کمتر نہیں ہو سکتے اور نہ دونوں اس سے زائد ہو سکتے ہیں۔ پس خط زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر اس منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقطوں میں۔

اگر م =  $\frac{1}{2}$  تو دونوں مزدوج قطر باہمی منطبق ہو جاتے ہیں۔  
(و) فرض کرو ف اور د مزدوج قطروں کے ایک جوڑ کے سرے ہیں۔ ف کے محدد لا، م ہیں اور د کے لا، م۔ ابھی ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ان دو نقطوں میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا نقطہ خیالی ہوگا۔  
ج ف اور ج د کی مساواتیں  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ہیں پس از روئے نتیجہ ۹ (د)

$$(1) \dots\dots\dots = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\ \text{پس } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

چونکہ (لا، م) اور (لا، م') دونوں نقطے منحنی پر واقع ہیں۔ لہذا

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \text{ یا } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

∴ لا =  $\pm \frac{1}{2}$  م، م' =  $\pm \frac{1}{2}$  لا اور اس لیے از روئے (د) لا =  $\pm \frac{1}{2}$  م' اور (۲) اور (۳) مساواتوں سے ج ف + ج د = لا + م' =  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  یا  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

پس قطع ناقص کی طرہ قطع زائد کے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔



(۲) تعریف - کسی منحنی کا متقارب ایک ایسا خط مستقیم ہے جو اس منحنی سے لاتناہی پر دو نقطوں میں ملتا ہے لیکن جو لاتناہی پر بالکل واقع نہیں ہے۔

قطع زائد کے متقارب کی تعین - خط مستقیم  $a = m \cdot x + c$  جن نقطوں پر قطع زائد  $\frac{a}{b} - \frac{a}{b}$  = کو قطع کرتا ہے ان کے فضے مساوات

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{(m \cdot x + c)}{b} = 1 \text{ یعنی } \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \left( \frac{m}{b} - \frac{1}{b} \right) \cdot x + \frac{c}{b} = 0$$

سے دریافت ہوتے ہیں۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں ناتناہی ہو جاتی ہیں اگر  $a$  اور  $b$  دونوں کے سر صفر ہوں۔ یعنی اگر  $\frac{m}{b} - \frac{1}{b} = 0$  اور  $\frac{c}{b} = 0$  پس اس صورت میں  $c = 0$  اور  $m = \pm \frac{1}{b}$

لہذا قطع زائد  $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 1$  کے دو حقیقی متقارب ہوتے ہیں جن کی

مساواتیں  $a = \pm \frac{b}{x}$ ، میں۔ اگر ان کو ایک ہی مساوات میں لکھا جائے تو  $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$  ہے۔  $b$  میں سے خطوط مستقیم منحنی کے قاطع محور کے متوازی کھینچو اور  $a$  میں سے خطوط مزدوج محور کے متوازی کھینچو۔ تب اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ منحنی کے متقارب شدہ مستطیل کے وتر ہیں۔ سر قطع ناقص کے کوئی حقیقی نقطے لاتناہی پر واقع نہیں ہیں اور اس لیے ناقص کے متقارب خیالی ہیں۔

فصل (۳) کے آخری نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ قطع زائد کے متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک جوڑ پر واقع ہیں۔

مقارب کے متوازی کھینچا ہوا خط منحنی سے لاتناہی پر ایک نقطہ میں ملتا ہے۔

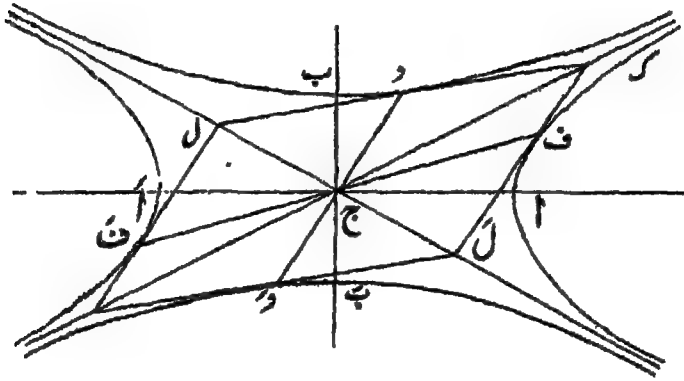
اس لیے کہ مساوات  $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \left( \frac{m}{b} - \frac{1}{b} \right) \cdot x + \frac{c}{b} = 0$  کی ایک

اصل ناتناہی ہو جاتی ہے اگر  $a$  کا سر صفر ہو۔ یہ شرط اس صورت میں پوری ہوتی ہے جبکہ  $m = \pm \frac{1}{b}$ ۔ پس خط مستقیم  $a = \pm \frac{b}{x}$   $c = 0$  ج قاطع زائد سے

لاستناہی پر ایک نقطہ میں ملتا ہے ج کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو -  
(ح) جس قطع زائد کا قاطع محور ب ب ہے اور مزدوج محور ۲۱ اس کی مساوات

$$(1) \dots\dots\dots = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} -$$

یہ قطع زائد اور  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  (۲) مساوات کا ابتدائی قطع زائد  
باہم دیگر مزدوج کہلاتے ہیں۔ دیکھو شکل ۳۸



شکل ۳۸

ذیل میں مزدوج زائد قطعوں کے جوڑ کی چند مساواتیں درج کی جاتی ہیں :-

- (۱) دونوں زائد قطعوں کے ایک ہی متقارب ہوتے ہیں۔
- (۲) اگر دو قطران دو زائد قطعوں میں سے ایک زائد قطع کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو وہ دوسرے زائد قطع کے لحاظ سے بھی مزدوج ہونگے جیسا کہ فصل ۲ (۹) سے مستنبط ہوتا ہے۔

(۳) مصرعہ بالا مزدوج زائد قطعوں کی مساواتیں جیسا کہ فصل (ج) میں بتایا گیا ہے، بشکل

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{لکھی جاسکتی ہیں۔}$$

واضح ہے کہ اگر طہ کی کسی قیمت کے لیے سہ ایک منحنی کے لیے مثبت ہے تو وہ دوسرے منحنی کے لیے منفی ہوگا۔

پس ہر ایک قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملیگا اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں میں ملیگا۔ معیناً ان دو منحنیوں کے نصف قطروں کے طول طہ کی جملہ قیمتوں کے لیے رابطہ سہ = سہ کے ذریعہ مربوط ہیں۔

(۴) اگر دوسرے قطر مساوات (۲) اور مساوات (۱) والے منحنیوں کو علی الترتیب ف اور د نقطوں میں قطع کرتے ہیں تو ج ف = ج د = لڑ۔

فرض کرو ف کے محدود لام، ما ہیں اور د کے محدود لام، ما تب خطوط مستقیم ج ف اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = 0 \quad \text{ہیں}$$

مزدوج قطروں کی شرط یعنی مر = مر = مر سے مساوات

$$\frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = 0 \quad \dots \dots \dots (۳) \quad \text{حاصل ہوتی ہے}$$

$$\left( \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = مر = مر = مر = \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} \right) \quad \text{پس} \quad \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما}$$

اور چونکہ نقطہ (لا، ما) منحنی (۲) پر واقع ہے اور نقطہ (لا، ما) منحنی (۱) پر ہے لہذا

$$\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = 1 - \left( \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} \right) = \frac{لا}{لا} - \frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما}$$

$$\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = \pm \frac{لا}{لا} \dots \dots (۴) \quad \text{اور اس لیے مساوات (۳) سے} \quad \frac{لا}{لا} = \pm \frac{لا}{لا} \dots \dots (۵)$$

$$\text{پس ج ف} - \text{ج د} = لا + لا - لا - لا = لا - لا$$

$$= لا + لا - لا - لا = لا - لا = لا - لا = لا - لا$$

$$\text{ج ف} - \text{ج د} = لا - لا$$

[تیسرا یاد رکھنا چاہیے کہ ج و ف اور ج و فردوج نصف قطر نہیں ہیں اس لیے کہ ف اور و ایک ہی قطع زائد پر واقع نہیں ہیں۔ خط و ج و ابتدائی قطع زائد کو دو خیالی نقطوں میں قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے 'د' 'د' فرض کیے جائیں تو مساوات (۵) سے ظاہر ہے کہ ج د' = ج و] (۵) ف 'ف' د' و د' پر کے خطوط ماس سے تیار شدہ متوازی الاضلاع کا رقبہ مستقل ہے اور اوب کے مساوی ہے۔

یہ متوازی الاضلاع م ج ف × ج د جب ف ج د یا م ج و × ج و کے مساوی ہے جس میں ج و نقطہ ف پر کے ماس پر ج سے ڈالا ہوا عمود ہے۔

$$\text{ف پر کے ماس کی مساوات } \frac{\text{لا}}{\text{و}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = ۱ \text{ ہے۔ ج و} = \frac{۱}{\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}} \\ \text{اور ج د} = \frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \text{اوب} \left( \frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} \right)$$

پس ج د × ج و = اوب

(۶) متقارب ف و د اور ف و کی تنصیف کرتے ہیں۔

اگر خط ف و کے وسطی نقطہ کے محدود لا، ماہوں تو لا ۲ = لا + لا اور ما ۲ = ما + ما

$$\frac{\text{لا}}{\text{و}} \pm \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا}}{\frac{\text{لا}}{\text{و}} \pm \frac{\text{لا}}{\text{ب}}} = \frac{\text{لا}}{\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}} = \frac{\text{لا}}{\text{اوب}}$$

پس خط و ف د اور ف و کے وسطی نقطہ خطوط لا = ج و میں سے کسی ایک خط پر واقع ہیں۔ معہذا چونکہ ج و ف و متوازی الاضلاع ہے ج و خط ف و یا خط ف و کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے متقاربوں میں سے ایک متقارب ہے۔ اس لیے د اور د پر کے خطوط ماس و اور د پر کے خطوط ماس سے متقاربوں پر ملے ہیں۔

(۷) بلحاظ قطع زائد (۲) نقطہ (لا، ما) کے قطبی کی مساوات  $\frac{\text{لا}}{\text{و}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = ۱$

ہے اور بلحاظ قطع زائد (۱) اس نقطہ کے قطبی کی مساوات  $\frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = ۱$  ہے پس ان دونوں منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی باہر گیر متوازی ہیں اور مرکز سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں۔

اگر (لا، ما) کوئی سا ایک نقطہ ف و منحنی (۲) پر واقع ہو تو اس کا قطبی بلحاظ منحنی (۱)

$$- \frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = ۱ \text{ یا } \frac{\text{لا}}{\text{و}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = ۱ \text{ ہے۔}$$

لیکن آخر الذکر مساوات منحنی (۲) کے نقطہ (- لا، - ما) پر کے خطِ ماس کی مساوات ہے اور یہ نقطہ ف میں سے گزرنے والے قطر کا دوسرا سر ہے۔  
پس ایک قطع زائد پر کے کسی نقطہ ف سے اس کے مزدوج قطع زائد پر خطوطِ ماس ف ق، ف ق' کھینچے جائیں تو خط ق ق' ابتدائی قطع زائد کو ف میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر مس کریگا۔

(ط) کوئی سے مزدوج قطروں کے جوڑ کو محورِ ماس کو قطع زائد کی مساوات کی تعیین۔ قاطع اور مزدوج محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات  

$$\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$$
 ہے۔

چونکہ مبدا اور میں کوئی تبدیلی نہیں کی جاتی ہے اس لیے نئی مساوات حاصل کرنے کی خاطر بجائے لا، ما کے ہم ل، لا + م، ما اور ل، لا + م، ما لکھتے ہیں۔ اس سے مساوات  

$$\frac{(ب\ ل + ل\ ل)}{ب} + \frac{(ب\ م + ل\ م)}{ب} = ۱$$

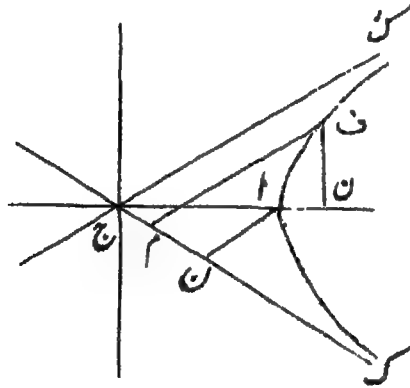
حاصل ہوتی ہے جو شکل ۱ لا + ۲ ح لا + ب ما = ۱ ..... (۱) ہے۔  
ہم نے چونکہ دو مزدوج قطروں کو محور مانا لا کا محور ما کے محور کے وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔  
پس لا کی کسی ایک مخصوص قیمت کے لیے از روئے مساوات (۱) ما کی دریافت شدہ دونوں قیمتیں مساوی و باہدگیر مخالف ہوتی چاہئیں۔ جس کے معنی یہ ہوئے کہ  

$$۰ = ۱$$
 اور منحنی کی مساوات شکل ۱ لا + ب ما = ۱ ..... (۲) ہوگی۔  
ہم جانتے ہیں کہ ان دو نصف مزدوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ پس اگر ان کے طول ل و اور ما اور ب فرض کیے جائیں تو چونکہ یہ طول علی الترتیب لا اور ما کے محوروں پر کے نقطوں سے ہیں لہذا مساوات (۲) میں ما اور لا کو علیحدہ علیحدہ صفر لکھنے سے

$$\frac{لا}{ب} = ۱$$
 اور 
$$\frac{ما}{ب} = ۲$$
 یعنی 
$$\frac{لا}{ب} = ۲$$
 اور 
$$\frac{ما}{ب} = ۱$$
 ہے۔  
پس ان نئے محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات 
$$\frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ب} = ۱$$
 ..... (۳) ہے  
چونکہ اس مساوات کی شکل وہی ہے جو ابتدائی مساوات کی تھی لہذا وہ جملہ تحقیقات جس میں منحنی کے محور باہدگیر علی القوام نہیں مانے گئے تھے حالیہ محوروں کے

ساتھ بھی برقرار رہتی ہیں۔ مثلاً  $د$  کے نتائج (۱) (۲) (۳) (۵) اور (۱۱) میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی۔ اسی طرح مقاربوں سے متعلق نتائج بھی جن کا ذکر کرنے میں آیا ہے برقرار رہتے ہیں۔ پس قطع زائد  $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$  کے مقاربوں کی مساوات  $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۰$  ہے۔

(ی) خط زائد کی مساوات اس کے مقاربوں کو محدودوں کے محور صاف کر۔ فرض کرو کہ شکل ۳۹ میں ج ک ' ج ک قطع زائد کے مقارب ہیں اور زاویہ ج ک = ع یعنی مس ع =  $\frac{۲}{۳}$  ' ف قطع زائد پر کا ایک نقطہ ہے جس کے محدود ج لا اور ج ما محوروں کے حوالہ سے لا ما ہیں اور ج ک ' ج ک محوروں کے حوالہ سے لا ما ہیں۔ خط ف م ' ج ک کے متوازی کھینچو اور اس کو ج ک سے نقطہ م میں ملنے دو۔ اور خط ف ن قاطع محور کے علی القوام کھینچو۔



شکل ۳۹

تب ج م = لا ' م ف = ما ' ج ن = لا ' ن ف = ما  
چونکہ ج ن = ج م جم ع + م ف جم ع

$$لا = (لا + ما) جم ع \dots \dots \dots (۱)$$

اور چونکہ ن ف = م ف جب ع - ج م جب ع

$$ما = (لا - لا) جب ع \dots \dots \dots (۲)$$

پس مساوات  $\frac{لا}{۳} - \frac{ما}{۲} = ۱$  میں یہ قیمتیں درج کرنے سے مساوات

$$\text{جم}^۲ = (لا + لا^۲) - \frac{\text{جب}^۲ = (ما - لا^۲)}{ب^۲} = \dots (۳) \text{ حاصل ہوتی ہے۔}$$

$$\text{لیکن مس}^۲ = \frac{ب}{ا} \text{ پس } \frac{ب}{ا} = \frac{\text{جب}^۲}{ب^۲} = \frac{\text{جم}^۲}{ا + لا + لا^۲}$$

پس از روئے مساوات (۳)  $ما - لا^۲ = لا + لا^۲$  یعنی متقاربوں کو جب حوالہ کے محور مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات  $ما - لا^۲ = لا + لا^۲$  برآمد ہوتی ہے۔

اسی طرح مزدوج قطع زائد کی مساوات متقاربوں کے حوالہ سے  $ما - لا^۲ = (ا + لا + لا^۲)$  حاصل ہوتی ہے۔

(ک) علی التوائم محدودوں کے حوالہ سے قطع زائد، اس کے متقاربوں اور مزدوج قطع زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا}{ا} - \frac{لا^۲}{ب^۲} = \frac{ما}{ب^۲} - \frac{لا^۲}{ا} = ۰ \text{ اور } \frac{لا}{ا} - \frac{لا^۲}{ب^۲} = ۱ - ا \text{ ہیں}$$

اگر محدودوں کے محور کسی طرح سے بھی بدلے جائیں تو ان کے لحاظ سے معررہ بالا "منحنیوں" کی نئی مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ان تینوں صورتوں میں یکساں تعویض کی ضرورت ہوگی۔

پس واضح ہے کہ محدودوں کے محوروں کی خواہ کچھ ہی وضع ہو قطع زائد اور مزدوج قطع زائد کی مساواتیں متقاربوں کی مساوات سے صرف ان کے مستقلوں کے لحاظ ہی سے مختلف ہوں گی اور ان زائد قطعوں کے یہ مستقل باہر دیگر مساوی اور مختلف العلامت ہوں گے۔

(ل) جب قطع زائد کے متقاربوں کے مابین کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے تو اس کو قائمہ قطع زائد کہتے ہیں۔

چونکہ متقاربوں کا درمیانی زاویہ  $۲$  مس  $ا$  کے مساوی ہوتا ہے اس لیے اس کی قیمت ایک زاویہ قائمہ ہونے کی صورت میں  $ب = لا$  ہو جاتا ہے۔ اس لحاظ سے ایسے منحنی کو بعض اوقات متساوی الاضلاع قطع زائد بھی کہتے ہیں۔

واضح ہے کہ ایسے یعنی قدیم قطع زائد کی مساوات  $لا - ما = لا$  ہے۔  
چونکہ اس سے پیشتر کی ایک فصل میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ متقاربوں کو جب محور  
مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات  $ما لا = لا + ب$  اور اس کے مزدوج قطع زائد کی مساوات  
 $ما لا = - (لا + ب)$  ہوتی ہے۔ لہذا قائم قطع زائد اور اس کے مزدوج کی مساواتیں  
مقاربوں کو محور ماننے پر علی الترتیب  $ما لا = لا$  اور  $لا ما = - لا$  ہو جاتی ہیں۔  
[طاب علم کو چاہیے کہ بطور مشتق قائم قطع زائد کی مساوات  $لا - ما = لا$  سے  
آغاز کر کے متقاربوں کو محدود ماننے اور ان جدید محدودوں کی رقموں میں سختی کی مساوات  
حاصل کرے۔]

واضح ہو کہ ایسے قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں  $لا - ما = لا$  اور  $لا ما = - لا$  ہیں اور یہ خطوط باہم دیگر علی القوائم ہیں۔ پس حوالہ کے محوروں کو  $\frac{3}{4}$  زاویہ ہیں  
گھمانے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ اس لیے کہ ایسی صورت میں  $لا = لا + ب$   
اور  $ما = - (لا + ب)$  پس مساوات  $لا - ما = لا$  اور  $لا ما = - لا$  کی یہ قیمتیں تعویض  
کرنے سے  $\frac{(لا + ما)^2}{4} - \frac{(لا - ما)^2}{4} = لا$  حاصل ہوتی ہے جو صاف کرنے پر

مساوات  $ما لا = لا$  میں تبدیل ہو جاتی ہے۔  
(م) قطع ناقص یا قطع زائد کی مساوات اس کو مبداء مان کر یوں حاصل کی جاسکتی  
ہے کہ مرکز مبداء والی مساوات میں لا کے عوض  $لا - لا$  لکھا جائے یعنی

$$(1) \dots\dots\dots 1 = \frac{لا}{ب} \pm \frac{(لا - لا)^2}{4}$$

اب اگر فرض کیا جائے کہ اس سے اس کے قریب تر ماسکہ کا فاصلہ مستقل (بالفرض د)  
لکھا جاتا ہے اور خروج المرکز کی قیمت اکائی ہو جاتی ہے تو سختی کی صورت قطع مکانی  
میں تبدیل ہو جاتی ہے جس کا در خاص  $د = د$  ہے۔

چونکہ  $د = لا - لا = لا - (لا - لا) = لا$  لہذا  $لا$  کی قیمت جب اکائی ہوتی ہے  
تو  $لا$  نامتناہی ہو جاتا ہے۔

$$\text{مہذا } (لا - لا)^2 = د (لا + لا) \therefore د = \frac{لا}{2}$$



پس مساوات (۱) کی رُو سے  $\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 12$  .

چونکہ  $1 = \infty$  پس  $1 = \pm 12$  .

اس لیے قطع مکانی قطع ناقص یا زائد کی انتہائی صورت ہے۔ اس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم و محور اقل نامتناہی ہیں۔ اس کا مرکز اور نیز دو سرا ماسکے بھی لاتنا ہی پر واقع ہیں۔

طالب علم کے لیے مفید ہوگا کہ بطور مشق قطع مکانی کے خواص قطع ناقص یا قطع زائد کے خواص سے مستنبط کرے۔

## دسویں باب کی مثالیں

(۱) - مندرجہ ذیل زائدوں کے متقاربوں اور ان کے مزدوج زائدوں کی مساوات دریافت کرو اور ان کی ترسیم کرو:-

$$(1) \quad 12 - 1 = 11 \quad (2) \quad 8 - 1 = 7 \quad (3) \quad 16 - 1 = 15$$

(۲) اگر ۲ اور ۳ مزدوج زائدوں کے خروج مرکز ہوں تو  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = 1$

(۳) کسی قطع زائد کے متقارب سے اس کے ماسکوں کا فاصلہ عدداً ب کے مساوی ہے۔

(۴) مرکز سے ایک ایسے خط کا فاصلہ جو قطع زائد کے ایک ماسکے سے ایک متقارب پر علی القوائم کھینچا جائے عدداً ۱ کے مساوی ہے۔

(۵) متقاربوں سے قطع زائد کے کسی نقطہ کے فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ قائم قطع زائد کا خروج مرکز ۱۲ ہے۔

$$(7) \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 1 \quad 0 = 1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 1$$

ناقص  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = 1$  کو مس کرتا ہے۔

(۸) اگر نقطہ (ع، ب) کا قطبی بلحاظ منحنی  $12 - 1 = 11$  منحنی  $12 + 1 = 13$  ہے۔

کو من کرتا ہے تو نقطہ (ع) پر قائم قطع زائد لا<sup>۱</sup> - ما<sup>۲</sup> - م<sup>۳</sup> و<sup>۴</sup> = ۰ پر واقع ہے۔  
 (۹) قطع زائد کے کسی خط تماس کا وہ جزو جو اس کے متقاربوں کا منقطع ہے  
 نقطہ تماس پر تنصیف پاتا ہے۔  
 (۱۰) قطع زائد کا کوئی ساخط تماس متقاربوں سے مستقل رقبہ کا مثلث قطع  
 کرتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ ما - مر لا = اور ما + مر لا = ۰ ہر کی تمام قیمتوں کے  
 لیے لا ما = ج<sup>۲</sup> کے مزدوج قطر ہیں۔

(۱۲) خط مستقیم لا = ۰ قطع زائد لا<sup>۱</sup> لا<sup>۲</sup> لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۲</sup> لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۳</sup> لا<sup>۵</sup> = ۰ کا ایک متقارب  
 ہے۔ دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟

(۱۳) اگر ہم مرکز دائروں کے کسی نظام پر کسی دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی  
 خطوط تماس کھینچ جائیں تو ان کے نقاط تماس ایک قائم قطع زائد پر واقع ہیں۔

(۱۴) کسی قائم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس کے قطبی سے مرکز  
 کے عمودی فاصلہ کا بالعکس متناسب ہے۔

(۱۵) ایک قطع زائد کے متقاربوں کے متوازی خطوط کھینچ کر ایک متوازی الاضلاع  
 تیار کیا جاتا ہے اور اس کا ایک وتر قطع زائد کا وتر ہے۔ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع  
 کے دوسرے وتر کی سمت قطع زائد کے مرکز میں سے گزرتی ہے۔

(۱۶) قائم قطع زائد کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں تک کھینچے ہوئے  
 خطوط مستقیم متقاربوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔



اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ  $\epsilon$  بناتا ہے تو مخروطی کی مساوات

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \text{زجم}(\epsilon - \epsilon) \text{ ہوگی۔}$$

کیونکہ اس صورت میں خطس ف خطس ی کے ساتھ زاویہ  $\epsilon - \epsilon$  بناتا ہے۔  
 (ب) اگر  $\epsilon = \epsilon$  مرتب پر کے کسی نقطہ کے محدود ہوں تو  $\text{زجم} \epsilon = \text{سی} \epsilon = \frac{r^2}{a^2}$   
 ∴ ہر تہ کی مساوات  $\frac{r^2}{a^2} = \text{زجم} \epsilon$  ہے۔

[ مخروطی کی مساوات اگر  $\frac{r^2}{a^2} = 1 + \text{زجم}(\epsilon - \epsilon)$  ہو تو اس کے مرتب کی  
 مساوات  $\frac{r^2}{a^2} = \text{زجم}(\epsilon - \epsilon)$  ہوگی ]  
 اگر ف س ف ماسکروٹب ہے اور ف کا زاویہ سمتی  $\epsilon$  ہے تو ف کا زاویہ  
 سمتی  $\pi + \epsilon$  ہوگا۔

$$\text{پس اگر س ف} = \text{س اور س ف} = \text{س تو}$$

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \text{زجم} \epsilon \text{ اور } \frac{r^2}{a^2} = 1 + \text{زجم}(\pi + \epsilon)$$

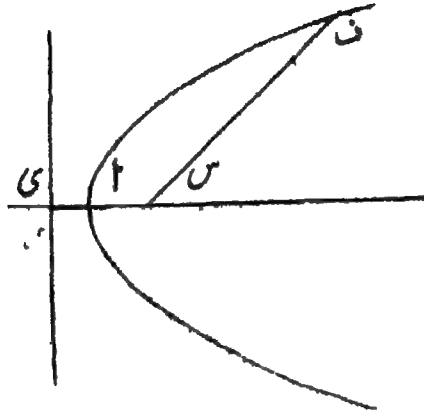
$$\therefore \frac{r^2}{a^2} = \frac{r^2}{a^2} + 2 \text{ یعنی } 2 = \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2}$$

اس لیے کسی بھی مخروطی میں نصف وتر خاص کسی بھی ماسکروٹب

وقر کے قطعات کا موسیقی اوسط ہے۔

(ج) مخروطی  $\frac{r^2}{a^2} = 1 + \text{زجم} \epsilon$  کی ترسیم اس کی مساوات کے ذریعہ  
 (۱) فرض کرو  $z = \text{تب منحنی قطع مکافی ہے اور مساوات } \frac{r^2}{a^2} = 1 + \text{زجم} z$   
 ہو جاتی ہے۔ نقطہ ۱ پر جہاں کہ منحنی محور کو قطع کرتا ہے  $\epsilon = 0$  اور  $\text{س} = \frac{r^2}{a^2}$   
 جیسے جیسے زاویہ  $\epsilon$  بڑھتا ہے ویسے ہی  $(1 + \text{زجم} \epsilon)$  گھٹتا ہے اور اس لیے  $\text{س}$  بڑھتا  
 ہے۔ اس طرح  $\text{س}$  بغیر کسی حد کے بڑھتا جاتا ہے حتیٰ کہ  $\epsilon = \pi$  کے مساوی  
 ہوتا ہے تو  $\text{س}$  کی قیمت نامتناہی بڑی ہوتی ہے  $\epsilon$  کی قیمت جب  $\pi$  سے تجاوز  
 ہو کر بڑھتی جاتی ہے تو  $1 + \text{زجم} \epsilon$  مسلسل بڑھتا جاتا ہے اور اس لیے  $\text{س}$  بھی مسلسل  
 گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ جب  $\epsilon = \pi$  تو  $\text{س}$  کی قیمت  $\frac{r^2}{a^2}$  کے مساوی

ہو جاتی ہے۔ پس جیسا کہ شکل ۴۱ سے ظاہر ہے یہ منحنی سمت ۱ س میں لاتناہی



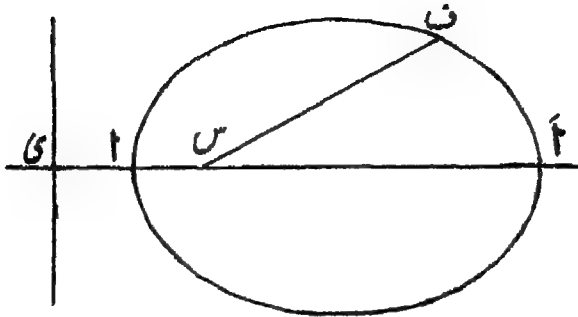
شکل ۴۱

ایک چلا جاتا ہے۔

(۲) فرض کرو  $z > 1$  تب منحنی قطع ناقص ہے۔

نقطہ ۲ پر  $\frac{1}{z} = 0$  اور  $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z}$  گھٹتا ہے اور اس لیے  $\frac{1}{z}$  گھٹتا ہے یعنی  $\frac{1}{z}$  بڑھتا ہے جیسے  $\frac{1}{z}$  بڑھتا ہے  $\frac{1}{z}$  جم  $\frac{1}{z}$  گھٹتا ہے اور اس لیے  $\frac{1}{z}$  گھٹتا ہے یعنی  $\frac{1}{z}$  بڑھتا ہے حتیٰ کہ  $\frac{1}{z} = \pi$  جبکہ  $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z}$  چونکہ  $z > 1$  لہذا  $\frac{1}{z}$  کی یہ قیمت مثبت ہے۔ پس منحنی محور کو دوبارہ کسی نقطہ ۱ پر قطع کرتا ہے ایسا کہ  $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z}$  ط کی قیمت  $\pi$  سے بڑھ کر جیسے جیسے  $\frac{1}{z}$  کے قریب پہنچتی ہے جم  $\frac{1}{z}$  مسلسل  $\frac{1}{z}$  سے ۱ تک بڑھتا ہے۔ اس لیے  $\frac{1}{z}$  مسلسل بڑھتا ہے اور  $\frac{1}{z}$  مسلسل  $\frac{1}{z}$  سے گھٹ کر  $\frac{1}{z}$  ہو جاتا ہے۔

چونکہ  $\frac{1}{z}$  کی کسی قیمت کے لیے بھی جم  $\frac{1}{z} = \pi$  (ط) یہ منحنی بلحاظ اپنے محور کے متشکل ہے۔ پس جب  $\frac{1}{z}$  کی قیمت اکائی سے کم ہوتی ہے تو مصرعہ بالا مساوات ایک بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے لحاظ سے متشکل ہے۔



شکل ۲۲

(۳) فرض کرو  $ز < ا$  تب منحنی قطع زائد ہے۔

نقطہ ۲ پر  $ط = ۰$  اور  $س = \frac{۱}{۱+۲}$

جیسے جیسے  $ط$  بڑھتا ہے حجم  $ط$  گھٹتا ہے اور اس لیے  $س$  بڑھتا ہے یہاں تک کہ  $ا + ز$  حجم  $ط = ۰$   $ط$  کی جب یہ قیمت ہوتی ہے تو ہم اس زاویہ کو  $ع$  کہیں گے (شکل ۲۲ میں یہ زاویہ  $ا$  اس کا ہے) اور اس صورت میں  $س$  کی قیمت ناقصاری بڑی ہو جاتی ہے۔

جب زاویہ  $ط$  کی قیمت  $ع$  سے متجاوز ہو کر بڑھتی جاتی ہے تو  $(ا + ز)$  حجم  $ط$

منفی ہوتا ہے اور جب  $ط = \pi$  تو  $س = -\frac{۱}{۱+۲}$  اور  $ا = -$

$(ا + ز)$  حجم  $ط$  منفی رہیگا تا وقتیکہ  $ط = \pi - ۲$  یعنی زاویہ  $ا$  اس کا۔

جب زاویہ  $ط = (\pi - ۲)$  تو  $س$  پھر ناقصاری بڑا ہوتا ہے۔ اگر  $ط$  اس

سے ذرا سا چھوٹا ہوتا ہے تو  $س$  بہت بڑا اور منفی ہوتا ہے اور اگر  $ط$  ذرا سا

بڑا ہوتا ہے تو  $س$  بہت بڑا اور مثبت ہوتا ہے۔  $س$  کی قیمتیں مثبت

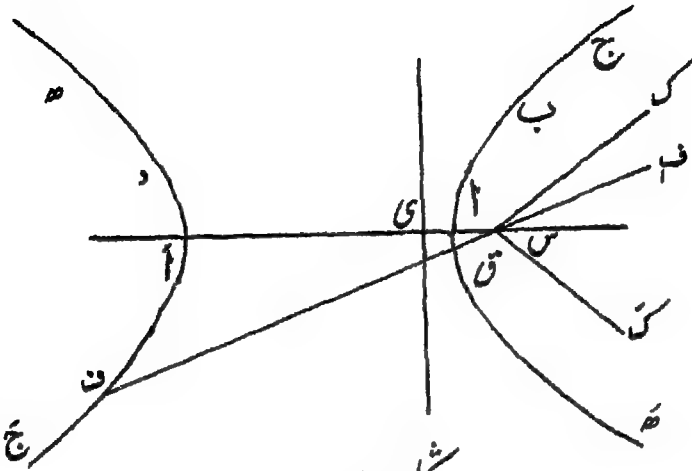
رہیں گی جبکہ زاویہ  $ط$  کی قیمت  $(\pi - ۲)$  سے بدل کر  $\pi - ۲$  ہوتی ہے۔

پس منحنی مندرجہ ذیل ترتیب سے کھینچی جاتی ہے :- (دیکھو شکل ۲۲)

پہلے اس کا حصہ  $ا$  ب ج کھینچا جاتا ہے۔ اس کے بعد  $خ$  ف  $ا$  پھر  $ا$  د  $ع$  اور  $ب$  سے آخر  $ع$  ق  $ا$ ۔

یہ منحنی دو شاخوں یعنی ج ب ا ق  $ع$  اور ج ف ا د  $ع$  پر مشتمل ہے۔ ان میں

سے آخر  $ا$  ذکر سالم شاخ کے لیے نیم قطر سمتی منفی ہے۔



شکل ۳۳

اگر شکل ۳۲ کی طرح ایک خط  $س ق$  منحنی کو دو نقطوں  $ق$  اور  $ف$  میں قطع کرتا ہو اکھینچا جائے جو منحنی کی مختلف شاخوں پر واقع ہیں تو ان نقطوں  $ق$  اور  $ف$  کی نسبت یہ نہ خیال کرنا چاہیے کہ وہ ایک ہی زاویہ سمتی رکھتے ہیں نیم قطر سمتی  $س ق$  منحنی ہے یعنی خط  $س ق$  اس سمت کے مخالف سمت میں کھینچا گیا ہے جس سے اس کے زاویہ سمتی کی حد بندی ہوتی ہے پس اگر  $ف س$  کو  $ف س$  تک بڑھایا جائے تو زیر بحث زاویہ سمتی  $اس ق$  ہونا چاہیے۔ اس لیے اگر نقطہ  $ق$  کا زاویہ سمتی  $ط$  ہو تو نقطہ  $ف$  کا زاویہ سمتی  $ط - ۳۳$  ہوگا۔

(د) کسی مخروطی پر کے کوئی سے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات کی تعیین اور اس کے ذریعہ محنوطی پر کے کسی نقطہ کے خط  $ماس$  کی مساوات فرض کرو کہ  $ف$  اور  $ق$  نقطوں کے سمتی زاویے بالترتیب  $(ع - ب)$  اور  $(ع + ب)$  ہیں اور مخروطی کی مساوات لے کر  $ا + زجم ط ..... (۱)$  ہے۔

خط مستقیم جس کی مساوات لے کر  $ا + جم ط + ب جم (ط - ع) ..... (۲)$  ہے کوئی سے دو نقطوں میں سے گزریگا اس لیے کہ اس کی مساوات میں دو باہر گیر غیر تاج مستقل  $ا$  اور  $ب$  شریک ہیں۔ اور ہم نے باب (۶) میں دیکھا ہے کہ خط مستقیم کی سادہ ترین قطبی مساوات  $س اجم (ط - ع) = ع$  ہے جس میں  $ع$  مبداء سے خط پر کھینچا ہوا عمود ہے۔

یہ خط مستقیم دیے ہوئے دو نقطوں ف اور ق میں سے گذریگا اگر س کی قیمتیں مساوات (۲) میں وہی ہیں جو مساوات (۱) میں ہیں جب ط = ع - ہ اور جب ط = ع + ہ - واضح ہے کہ یہ صورت اس وقت واقع ہوگی جبکہ

$$\begin{aligned} ۱ + زجم (ع - ہ) &= ۱ جم (ع - ہ) + ب جم ہ \\ ۱ + زجم (ع + ہ) &= ۱ جم (ع + ہ) + ب جم ہ \\ \therefore ۱ &= ز اور ب جم ہ = ۱ \end{aligned}$$

پس ۱ اور ب کی ان قیمتوں کو مساوات (۲) میں تعویض کرنے سے ف اور ق کو ملانے والے خط یعنی مخروطی کے وتر کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم ط + قط ب جم (ط - ع) \dots\dots\dots (۳) \text{ برآمد ہوتی ہے۔}$$

لہذا مخروطی پر کے ع زاویہ سمتی والے نقطہ کے خط مماس کی مساوات دریافت کرنے کے لیے مساوات (۳) میں ہ = ۰ لکھنا چاہیے۔

$$\text{پس اس کی مساوات } \frac{ل}{س} = زجم ط + جم (ط - ع) \dots\dots\dots (۴) \text{ ہے۔}$$

نتیجہ صریح۔ اگر مخروطی کی مساوات  $\frac{ل}{س} = ۱ + زجم (ط - جہ)$  مانی جائے تو (ع - ہ) اور (ع + ہ) نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم (ط - جہ) + قط ب جم (ط - ع) \text{ ہے}$$

اور ع زاویہ سمتی والے نقطہ پر کے خط مماس کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم (ط - جہ) + جم (ط - ع) \text{ ہے۔}$$

(د) مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو۔

$$\text{مخروطی کی مساوات } \frac{ل}{س} = ۱ + زجم ط \text{ مانو۔ اس کے زاویہ سمتی ع والے}$$



نقطہ پر کے خط مماس کی مساوات لے = زجم ط + جم (ط - ع) ہے  
اس خط مماس کے کسی علی التوالم خط کی مساوات

$$\frac{ج}{س} = زجم (ط + \frac{\pi}{4}) + جم (ط + \frac{\pi}{4} - ع)$$

یعنی  $\frac{ج}{س} = زجب ط - جب (ط - ع)$  ہے  
یہ مساوات عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی بشرطیکہ ج اس طرح منتخب ہو کہ نقطہ جس کے

قطبی محدود  $\frac{ل}{س} = ۱ + زجم ع$  میں اس خط پر واقع ہوں۔

پس چاہیے کہ ج  $\frac{۱ + زجم ع}{س} = زجب ع$

$$\text{یعنی ج} = \frac{ل - زجب ع}{۱ + زجم ع}$$

عماد کی مطلوبہ مساوات

$$\frac{ل - زجب ع}{۱ + زجم ع} = زجب ط + جب (ط - ع) \text{ ہے}$$

(و) کسی نقطہ کے بلحاظ ایک مخروطی کے قطبی کی قطبی مساوات

مخروطی کی مساوات لے = ۱ + زجم ط ..... (۱) مانو  
فرض کر دو دیے ہوئے نقطہ کے محدود سم ط میں اور مخروطی کے  
جن نقطوں پر کے مماس دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں ان کے سمتی زاویے  
ع ± بہ ہیں۔ ان نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم ط + قط بہ جم (ط - ع) \dots\dots\dots (۲) \text{ ہوگی}$$

خطوط مماس کی مساواتیں

$$\frac{ل}{س} = زجم ط + جم (ط - ع + بہ)$$

$$\text{اور} \quad \frac{ل}{س} = زجم ط + جم (ط - ع - بہ) \text{ ہوگی}$$

چونکہ یہ نقطے (سم، ط) میں سے گزرتے ہیں،

$$\text{اس لیے } \frac{ل}{س} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع + ب)}$$

$$\text{اور } \frac{ل}{سم} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع - ب)}$$

$$\text{پس } ط = ع \text{ اور جم ب} = \frac{ل}{سم} - \text{زجم ط}$$

ع اور ب کی یہ قیمتیں مساوات (۲) میں قیوین کرنے سے

$$\left( \frac{ل}{سم} - \text{زجم ط} \right) \left( \frac{ل}{سم} - \text{زجم ط} \right) = \text{جم (ط - ط)} \dots (۳)$$

جو مطلوبہ قطبی مساوات ہے۔

مثال (۱)۔ اگر مخروطی کے کسی نقطہ ف پر کا خط عاس مرتبہ سے نقطہ ک پر ملے تو زاویہ ک س ف قائمہ ہے جس میں س مخروطی کا ماسکہ ہے اگر نقطہ ف کا سمتی زاویہ ع فرض کیا جائے تو ف پر کے خط عاس کی مساوات

$$\frac{ل}{سم} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع)} \text{ ہوگی}$$

یہ خط مرتبہ سے جس کی مساوات ل = زسم ط ہے ایکہ ایسے نقطہ پر ملتا ہے

$$\text{جہاں جم (ط - ع)} = ۰ \text{ پس واضح ہے کہ نقطہ ک پر ط - ع} = \frac{\pi}{۲}$$

اس لیے زاویہ ک س ف قائمہ ہے۔

مثال (۲)۔ مخروطی کے متقاربوں کی قطبی مساوات کی تعیین۔

مخروطی کی مساوات  $\frac{ل}{سم} = ۱ + \text{زجم ط}$  فرض کرو۔ مخروطی پر کے ایسے نقطہ کے خط عاس کی مساوات جس کا سمتی زاویہ ع ہے،

$$\frac{ل}{سم} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع)} \dots (۱)$$

$$\text{اگر سم} = \infty \text{ تو } ۰ = ۱ + \text{زجم ع} \dots (۲) \text{ اور ایسی}$$

صورت میں نقطہ مذکور مخروطی پر لائتا ہی پر کا نقطہ ہوگا۔

پس ع کو (۱) اور (۲) مساواتوں میں سے ساقط کرنے سے مساوات

{ ز لہ } + (۱ - ز) جم ط = ز<sup>۲</sup> جب<sup>۲</sup> ط جب<sup>۲</sup> ل = (ز<sup>۲</sup> - ۱) جب<sup>۲</sup> ط  
حاصل ہوتی ہے جو مخروطی کے متقارب کی قطبی مساوات ہے۔

## گیارہویں باب کی مثالیں

(۱) مکانی پر کے کسی دو خطوط تماس کا خارجی زاویہ ان کے نقاط تماس کے سمتی زاویوں کے تفاوت کا نصف ہے۔

(۲) کسی دیے ہوئے مکانی کے ایسے دو خطوط تماس کے نقطہ تقاطع کا طریق جو باہر دیگر ایک مستقل زاویہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ایک قطع زائد ہے جس کا ماسک اور مرتب دیے ہوئے مکانی کا ماسک اور مرتب ہے۔  
(۳) اگر ف س ف اور ق س ق مخروطی کے کوئی سے دو ماسکی وتر باہر دیگر علی التوائم ہوں تو ثابت کرو کہ  $\frac{1}{ق س \times ف س} + \frac{1}{ق س \times ف س}$  مستقل ہے۔

(۴) مخروطی کی قطبی مساوات کے ذریعہ سے ثابت کرو کہ ایسے نقطہ کا طریق جس کے فاصلوں کا حاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے قطع ناقص ہے۔

(۵) اگر دو مخروطیوں کا ماسک مشترک ہے تو بتاؤ کہ ان کے دو مشترک وتر ان کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزریں گے۔

(۶) مخروطی لہ = ۱ + ز جم ط کے دو باہر دیگر علی التوائم خطوط تماس کے نقطہ تقاطع کا طریق مستغنی س<sup>۲</sup> (ز<sup>۲</sup> - ۱) - لہ ز سما جم ط + لہ<sup>۲</sup> = ۰ ہے۔

(۷) ایک معین قطر کا دائرہ جو ایک دیے ہوئے مخروطی کے ماسک س میں سے گزرتا ہے مخروطی کو 'ا' ب' ج' د' میں قطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ

س ۱ × س ب × س ج × س د مستقل ہے۔  
(۸) ف و ف اگر س ماسک والے مخروطی کے کسی ثابت نقطہ میں سے

گزرنے والا وتر ہو تو مس ۱/۴ ف س و مس ۱/۴ ف س و مستقل ہوگا۔

(۹) مخروطی لیے  $1 + \text{زجم طہ پر کے تین نقطوں کے سمتی زاویے}$   
 عہ، بہ، جہ ہیں۔ ان نقطوں پر کے عماد نقطہ سہا، طہ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ  
 $2 \text{ طہ} = عہ + بہ + جہ$

---

# بارہواں باب

## درجہ دوم کی عام مساوات

۶۵ د (۱)۔ درجہ دوم کی عام مساوات پر بحث کرنے سے پہلے ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ محوروں کی تبدیلی کے کسی مساوات کے درجہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔

صفحات ۱۳۸ و ۱۳۹ کے مطالعہ سے ظاہر ہے کہ محدّدوں کے مبداء کی تبدیلی اور محوروں کے گھاؤ کا اثر صرف اسی قدر ہوتا ہے کہ نئی مساوات میں بجائے محدّد لا اور ما کے مصرعہ ذیل کی نوعیت کے جملے استعمال کیے جاتے ہیں:

ل لا + م ما + ن اور ل لا + م ما + ن

یہ جملے پہلے ہی درجے کے ہیں اس لیے اگر وہ کسی مساوات میں بجائے لا اور ما کے لکھے جائیں تو واضح ہے کہ مساوات کا درجہ بلند تر نہیں ہوگا۔ یہ درجہ کم تر بھی اس لیے نہیں ہوگا کہ اگر بالفرض وہ کم تر ہوتا تو اسی استدلال سے مستنبط ہوتا ہے کہ ابتدائی محوروں پر عود کر آنے سے اور اس لیے ابتدائی مساوات پر واپس جانے سے مساوات کا درجہ بلند تر ہو جاتا ہے لیکن ایسا نہیں ہوتا ہے۔ پس محوروں کی تبدیلی سے مساوات کے درجہ میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہونے پاتی۔

(ب) ہم ایسا مستثنیٰ جس کی مساوات دوسرے دوسرے جہاں کی ہو تراش مخفی و ط ہے۔

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مخفی کے محدّدوں کے محور باہد گیر علی القوائم ہیں۔

اس لیے کہ اگر مساوات مائل محوروں سے متعلق ہو تو بھی ہم اس کو علی التوائم محوروں کی رقوم میں بدل سکتے ہیں اور اس تبدیلی سے مساوات کا درجہ غیر متغیر رہتا ہے۔ جیسا کہ ابھی ثابت کیا گیا۔

ہم متغی کی مساوات  $1\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha + 7\alpha + 8\alpha + 9\alpha + 10\alpha + 11\alpha + 12\alpha + 13\alpha + 14\alpha + 15\alpha + 16\alpha + 17\alpha + 18\alpha + 19\alpha + 20\alpha + 21\alpha + 22\alpha + 23\alpha + 24\alpha + 25\alpha + 26\alpha + 27\alpha + 28\alpha + 29\alpha + 30\alpha + 31\alpha + 32\alpha + 33\alpha + 34\alpha + 35\alpha + 36\alpha + 37\alpha + 38\alpha + 39\alpha + 40\alpha + 41\alpha + 42\alpha + 43\alpha + 44\alpha + 45\alpha + 46\alpha + 47\alpha + 48\alpha + 49\alpha + 50\alpha + 51\alpha + 52\alpha + 53\alpha + 54\alpha + 55\alpha + 56\alpha + 57\alpha + 58\alpha + 59\alpha + 60\alpha + 61\alpha + 62\alpha + 63\alpha + 64\alpha + 65\alpha + 66\alpha + 67\alpha + 68\alpha + 69\alpha + 70\alpha + 71\alpha + 72\alpha + 73\alpha + 74\alpha + 75\alpha + 76\alpha + 77\alpha + 78\alpha + 79\alpha + 80\alpha + 81\alpha + 82\alpha + 83\alpha + 84\alpha + 85\alpha + 86\alpha + 87\alpha + 88\alpha + 89\alpha + 90\alpha + 91\alpha + 92\alpha + 93\alpha + 94\alpha + 95\alpha + 96\alpha + 97\alpha + 98\alpha + 99\alpha + 100\alpha = 0$  فرض کرتے ہیں جو دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل ہے۔

اگر محوروں کو ایک معین زاویہ میں گھما دیں تو مساوات میں سے لا ما والی رقم خارج ہو سکتی ہے۔ اس لیے کہ محوروں کو زاویہ طہ میں گھمانے کے لیے بجائے لا اور ما کے علی الترتیب لا جم طہ - ما جب طہ اور لا جب طہ + ما جم طہ لکھنا پڑتا ہے (ملاحظہ ہو صفحہ ۱۳۹)۔

اس تعویض سے مساوات (۱) بصورت

۱) (لاجم طہ - ماجب طہ) + ۲ ح (لاجم طہ + ماجب طہ) (لاجم طہ + ماجب طہ) + ب (لاجم طہ + ماجب طہ) + ۲ گ (لاجم طہ - ماجب طہ) + ۲ ف (لاجم طہ + ماجب طہ) + ج = ۰ ..... (۲)

تبدیل ہو جاتی ہے جس میں لا اما کا سر ۲ (ب - ۱) جب ط جم طہ + ۲ ح (جم طہ - جب طہ) ہے

اور وہ منفرد جاتا ہے جبکہ  $\frac{z^2}{z-1} = \mu$  ..... (۳)

چونکہ ایسا زاویہ جس کا تماس کوئی حقیقی مقدار ہو دریافت ہو سکتا ہے

لہذا زاویہ طہ =  $\frac{1}{2}$  مس<sup>۱</sup>  $\frac{2}{2}$  تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

پس مساوات (۲) کو شکل

۱)  $a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z = 0$  ... (۲)

اگر نہ تو ۱ صفر ہے یا نہ ب تو مساوات (۲) کو مندرجہ ذیل شکل میں ڈھال سکتے ہیں :-

$$ک = ۱ \left( \frac{گ}{۱} + ۱ \right) + ۲ \left( \frac{ب}{۲} + ۱ \right) + ۳ \left( \frac{ج}{۳} + ۱ \right) + ۴ \left( \frac{د}{۴} + ۱ \right) + ۵ \left( \frac{هـ}{۵} + ۱ \right) + ۶ \left( \frac{و}{۶} + ۱ \right) + ۷ \left( \frac{ز}{۷} + ۱ \right) + ۸ \left( \frac{حـ}{۸} + ۱ \right) + ۹ \left( \frac{ط}{۹} + ۱ \right) + ۱۰ \left( \frac{ق}{۱۰} + ۱ \right) + ۱۱ \left( \frac{ک}{۱۱} + ۱ \right) + ۱۲ \left( \frac{خ}{۱۲} + ۱ \right) + ۱۳ \left( \frac{دال}{۱۳} + ۱ \right) + ۱۴ \left( \frac{ر}{۱۴} + ۱ \right) + ۱۵ \left( \frac{زay}{۱۵} + ۱ \right) + ۱۶ \left( \frac{س}{۱۶} + ۱ \right) + ۱۷ \left( \frac{ش}{۱۷} + ۱ \right) + ۱۸ \left( \frac{ص}{۱۸} + ۱ \right) + ۱۹ \left( \frac{ض}{۱۹} + ۱ \right) + ۲۰ \left( \frac{ظ}{۲۰} + ۱ \right) + ۲۱ \left( \frac{ع}{۲۱} + ۱ \right) + ۲۲ \left( \frac{غ}{۲۲} + ۱ \right) + ۲۳ \left( \frac{ف}{۲۳} + ۱ \right) + ۲۴ \left( \frac{قay}{۲۴} + ۱ \right) + ۲۵ \left( \frac{کay}{۲۵} + ۱ \right) + ۲۶ \left( \frac{گay}{۲۶} + ۱ \right) + ۲۷ \left( \frac{بay}{۲۷} + ۱ \right) + ۲۸ \left( \frac{جay}{۲۸} + ۱ \right) + ۲۹ \left( \frac{دay}{۲۹} + ۱ \right) + ۳۰ \left( \frac{هـay}{۳۰} + ۱ \right) + ۳۱ \left( \frac{وay}{۳۱} + ۱ \right) + ۳۲ \left( \frac{زay}{۳۲} + ۱ \right) + ۳۳ \left( \frac{حـay}{۳۳} + ۱ \right) + ۳۴ \left( \frac{طay}{۳۴} + ۱ \right) + ۳۵ \left( \frac{قay}{۳۵} + ۱ \right) + ۳۶ \left( \frac{کay}{۳۶} + ۱ \right) + ۳۷ \left( \frac{خay}{۳۷} + ۱ \right) + ۳۸ \left( \frac{دالay}{۳۸} + ۱ \right) + ۳۹ \left( \frac{رay}{۳۹} + ۱ \right) + ۴۰ \left( \frac{زay}{۴۰} + ۱ \right) + ۴۱ \left( \frac{سay}{۴۱} + ۱ \right) + ۴۲ \left( \frac{شay}{۴۲} + ۱ \right) + ۴۳ \left( \frac{صay}{۴۳} + ۱ \right) + ۴۴ \left( \frac{ضay}{۴۴} + ۱ \right) + ۴۵ \left( \frac{ظay}{۴۵} + ۱ \right) + ۴۶ \left( \frac{عay}{۴۶} + ۱ \right) + ۴۷ \left( \frac{غay}{۴۷} + ۱ \right) + ۴۸ \left( \frac{فay}{۴۸} + ۱ \right) + ۴۹ \left( \frac{قay}{۴۹} + ۱ \right) + ۵۰ \left( \frac{کay}{۵۰} + ۱ \right) + ۵۱ \left( \frac{گay}{۵۱} + ۱ \right) + ۵۲ \left( \frac{بay}{۵۲} + ۱ \right) + ۵۳ \left( \frac{جay}{۵۳} + ۱ \right) + ۵۴ \left( \frac{دay}{۵۴} + ۱ \right) + ۵۵ \left( \frac{هـay}{۵۵} + ۱ \right) + ۵۶ \left( \frac{وay}{۵۶} + ۱ \right) + ۵۷ \left( \frac{زay}{۵۷} + ۱ \right) + ۵۸ \left( \frac{حـay}{۵۸} + ۱ \right) + ۵۹ \left( \frac{طay}{۵۹} + ۱ \right) + ۶۰ \left( \frac{قay}{۶۰} + ۱ \right) + ۶۱ \left( \frac{کay}{۶۱} + ۱ \right) + ۶۲ \left( \frac{خay}{۶۲} + ۱ \right) + ۶۳ \left( \frac{دالay}{۶۳} + ۱ \right) + ۶۴ \left( \frac{رay}{۶۴} + ۱ \right) + ۶۵ \left( \frac{زay}{۶۵} + ۱ \right) + ۶۶ \left( \frac{سay}{۶۶} + ۱ \right) + ۶۷ \left( \frac{شay}{۶۷} + ۱ \right) + ۶۸ \left( \frac{صay}{۶۸} + ۱ \right) + ۶۹ \left( \frac{ضay}{۶۹} + ۱ \right) + ۷۰ \left( \frac{ظay}{۷۰} + ۱ \right) + ۷۱ \left( \frac{عay}{۷۱} + ۱ \right) + ۷۲ \left( \frac{غay}{۷۲} + ۱ \right) + ۷۳ \left( \frac{فay}{۷۳} + ۱ \right) + ۷۴ \left( \frac{قay}{۷۴} + ۱ \right) + ۷۵ \left( \frac{کay}{۷۵} + ۱ \right) + ۷۶ \left( \frac{گay}{۷۶} + ۱ \right) + ۷۷ \left( \frac{بay}{۷۷} + ۱ \right) + ۷۸ \left( \frac{جay}{۷۸} + ۱ \right) + ۷۹ \left( \frac{دay}{۷۹} + ۱ \right) + ۸۰ \left( \frac{هـay}{۸۰} + ۱ \right) + ۸۱ \left( \frac{وay}{۸۱} + ۱ \right) + ۸۲ \left( \frac{زay}{۸۲} + ۱ \right) + ۸۳ \left( \frac{حـay}{۸۳} + ۱ \right) + ۸۴ \left( \frac{طay}{۸۴} + ۱ \right) + ۸۵ \left( \frac{قay}{۸۵} + ۱ \right) + ۸۶ \left( \frac{کay}{۸۶} + ۱ \right) + ۸۷ \left( \frac{خay}{۸۷} + ۱ \right) + ۸۸ \left( \frac{دالay}{۸۸} + ۱ \right) + ۸۹ \left( \frac{رay}{۸۹} + ۱ \right) + ۹۰ \left( \frac{زay}{۹۰} + ۱ \right) + ۹۱ \left( \frac{سay}{۹۱} + ۱ \right) + ۹۲ \left( \frac{شay}{۹۲} + ۱ \right) + ۹۳ \left( \frac{صay}{۹۳} + ۱ \right) + ۹۴ \left( \frac{ضay}{۹۴} + ۱ \right) + ۹۵ \left( \frac{ظay}{۹۵} + ۱ \right) + ۹۶ \left( \frac{عay}{۹۶} + ۱ \right) + ۹۷ \left( \frac{غay}{۹۷} + ۱ \right) + ۹۸ \left( \frac{فay}{۹۸} + ۱ \right) + ۹۹ \left( \frac{قay}{۹۹} + ۱ \right) + ۱۰۰ \left( \frac{کay}{۱۰۰} + ۱ \right) + ۱۰۱ \left( \frac{گay}{۱۰۱} + ۱ \right) + ۱۰۲ \left( \frac{بay}{۱۰۲} + ۱ \right) + ۱۰۳ \left( \frac{جay}{۱۰۳} + ۱ \right) + ۱۰۴ \left( \frac{دay}{۱۰۴} + ۱ \right) + ۱۰۵ \left( \frac{هـay}{۱۰۵} + ۱ \right) + ۱۰۶ \left( \frac{وay}{۱۰۶} + ۱ \right) + ۱۰۷ \left( \frac{زay}{۱۰۷} + ۱ \right) + ۱۰۸ \left( \frac{حـay}{۱۰۸} + ۱ \right) + ۱۰۹ \left( \frac{طay}{۱۰۹} + ۱ \right) + ۱۱۰ \left( \frac{قay}{۱۱۰} + ۱ \right) + ۱۱۱ \left( \frac{کay}{۱۱۱} + ۱ \right) + ۱۱۲ \left( \frac{خay}{۱۱۲} + ۱ \right) + ۱۱۳ \left( \frac{دالay}{۱۱۳} + ۱ \right) + ۱۱۴ \left( \frac{رay}{۱۱۴} + ۱ \right) + ۱۱۵ \left( \frac{زay}{۱۱۵} + ۱ \right) + ۱۱۶ \left( \frac{سay}{۱۱۶} + ۱ \right) + ۱۱۷ \left( \frac{شay}{۱۱۷} + ۱ \right) + ۱۱۸ \left( \frac{صay}{۱۱۸} + ۱ \right) + ۱۱۹ \left( \frac{ضay}{۱۱۹} + ۱ \right) + ۱۲۰ \left( \frac{ظay}{۱۲۰} + ۱ \right) + ۱۲۱ \left( \frac{عay}{۱۲۱} + ۱ \right) + ۱۲۲ \left( \frac{غay}{۱۲۲} + ۱ \right) + ۱۲۳ \left( \frac{فay}{۱۲۳} + ۱ \right) + ۱۲۴ \left( \frac{قay}{۱۲۴} + ۱ \right) + ۱۲۵ \left( \frac{کay}{۱۲۵} + ۱ \right) + ۱۲۶ \left( \frac{گay}{۱۲۶} + ۱ \right) + ۱۲۷ \left( \frac{بay}{۱۲۷} + ۱ \right) + ۱۲۸ \left( \frac{جay}{۱۲۸} + ۱ \right) + ۱۲۹ \left( \frac{دay}{۱۲۹} + ۱ \right) + ۱۳۰ \left( \frac{هـay}{۱۳۰} + ۱ \right) + ۱۳۱ \left( \frac{وay}{۱۳۱} + ۱ \right) + ۱۳۲ \left( \frac{زay}{۱۳۲} + ۱ \right) + ۱۳۳ \left( \frac{حـay}{۱۳۳} + ۱ \right) + ۱۳۴ \left( \frac{طay}{۱۳۴} + ۱ \right) + ۱۳۵ \left( \frac{قay}{۱۳۵} + ۱ \right) + ۱۳۶ \left( \frac{کay}{۱۳۶} + ۱ \right) + ۱۳۷ \left( \frac{خay}{۱۳۷} + ۱ \right) + ۱۳۸ \left( \frac{دالay}{۱۳۸} + ۱ \right) + ۱۳۹ \left( \frac{رay}{۱۳۹} + ۱ \right) + ۱۴۰ \left( \frac{زay}{۱۴۰} + ۱ \right) + ۱۴۱ \left( \frac{سay}{۱۴۱} + ۱ \right) + ۱۴۲ \left( \frac{شay}{۱۴۲} + ۱ \right) + ۱۴۳ \left( \frac{صay}{۱۴۳} + ۱ \right) + ۱۴۴ \left( \frac{ضay}{۱۴۴} + ۱ \right) + ۱۴۵ \left( \frac{ظay}{۱۴۵} + ۱ \right) + ۱۴۶ \left( \frac{عay}{۱۴۶} + ۱ \right$$

اگر نقطہ (- گ - ف) پر مبداء منتقل کیا جائے تو مساوات

۱ا + ب ما = ک ..... (۵) ہو جاتی ہے۔  
اگر بائیں جانب کی رقم (یعنی ک) = ۰ تو مساوات دو خطوط مستقیم کو  
تعبیر کرے گی (صفحہ ۱۳۱) لیکن اگر ک صفر نہ ہو تو مساوات

$$\frac{لا}{ب} + \frac{۱ا}{ب} = ۱ \text{ ہو جاتی ہے}$$

جو قطع ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر دونوں نسب نامہ ثابت ہوں اور قطع زاہل کو  
اگر ایک نسب نامہ ثابت ہو اور دوسرا متغی -

اگر دونوں نسب نامہ متغی ہوں تو واضح ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں  
مندرجہ بالا مساوات کے لئے صادق نہیں آسکتیں۔ اس صورت میں متغی ایک  
خیالی ناقص کی تعبیر کرے گا۔

اگر ۱ا اور ب مساوی ہوں تو ب = ۱ لکھنے سے مساوات لا + ما = ک  
جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔

اس کے بعد مساوات (۲) میں ۱ یا ب کو صفر مانو۔ ۱۵ (۱ا کی ٹو  
۱ا اور ب دونوں وقت واحد میں صفر نہیں ہو سکتے۔ فرض کرو کہ ۱ا صفر ہے۔  
تب مساوات مذکور بشکل

$$ب (۱ا + ف) = ۲ - گ لا - ج + ف ..... (۶)$$

کبھی جاسکتی ہے۔ اب اگر گ = ۰ تو مساوات دو متوازی خطوط کو تعبیر  
کرتی ہے جو اگر گ = ۰ کے ساتھ ف = ب ج = بھی ہو تو باہم دیگر منطبق  
ہوتے ہیں۔ اگر گ صفر نہ ہو تو مساوات بشکل ذیل لکھی جاسکتی ہے :-

$$(۱ا + ف) = ۲ - گ (لا - ۲ب) + ج$$

جو ایک قطع مکافاتی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور لا کے محور کے متوازی ہے۔  
پس ہر صورت میں دوسرے درجہ کی مساوات کا معنی تراش مخروط ہے۔

(ج) تراش مخروط کے مرکز کے محلہ دین کی دریافت، درجہ دوم کی عام مساوات کو مان کر نویں باب کے شروع میں ہم نے دیکھا ہے کہ جب متحدہ دین کا مبدا تراش مخروط کا مرکز ہوتا ہے تو اس کی مساوات میں لا اور ما کی پہلی قوت کی رقیس نہیں پائی جاتی ہیں۔

پس عام مساوات کے ذریعہ تراش مخروط کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبدا کو کسی ایسے نقطہ (لا، ما) میں تبدیل کرنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے لا اور ما کے سر صفر ہو جاتے ہیں۔

پس مساوات لا + لا + ۲ح + لا + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ کو نقطہ لا، ما میں سے گزرنے والے متوازی محروں کے ذریعہ ظاہر کرنے کے لیے لا کے عوض لا + لا اور ما کے عوض ما + ما لکھنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے مساوات

$$(لا + لا) + (لا + لا) + ۲ح + (لا + لا) + ب + (ما + ما) + ۲گ + (لا + لا) + ۲ف + (ما + ما) + ج = ۰$$

یعنی لا + لا + ۲ح + لا + لا + (لا + لا + ۲ح + لا + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج) = ۰ ہو جاتی ہے اور اس میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہو جاتے ہیں بشرطیکہ لا اور ما کا انتخاب اس طرح ہو کہ

$$لا + لا + ۲ح + لا + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ \quad (۱)$$

اور

$$ح + لا + ب + ما + ۲ف = ۰ \quad (۲)$$

پس مبدا (لا، ما) کے حوالہ سے مساوات

لا + لا + ۲ح + لا + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ ..... (۳)

ہوگی جس میں ج = لا + لا + ۲ح + لا + ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج ..... (۴)

اس لیے تراش مخروط کے مرکز کے محدد لا اور ما کی وہ قیمتیں ہیں جو (۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔



∴ مرکز نقطہ  $\left( \frac{\text{ح ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ح}}, \frac{\text{گ ح} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ح}} \right)$  ہے

جب  $\text{ا ب} - \text{ح} = 0$  تو مرکز کے محدود نہ متناہی ہوتے ہیں یعنی مرکز لا تنہائی پر واقع ہوتا ہے اور اس لیے منحنی قطع مکانی ہے۔ لیکن جب  $\text{ح ف} - \text{ب گ}$  اور  $\text{ا ب} - \text{ح} = 0$  یعنی

$$\frac{\text{ا}}{\text{ح}} = \frac{\text{ب}}{\text{ف}} = \frac{\text{گ}}{\text{ا}}$$

تو (۱) اور (۲) مساواتیں ایک ہی خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں اور اس خط کا کوئی نقطہ منحنی کا ایک مرکز ہے پس اس صورت میں مرکز کا طریق دو متوازی خطوط مستقیم ہے واضح ہو کہ مندرجہ بالا بحث میں محور خواہ علی التوائم ہو سکتے ہیں یا مائل۔

(د) درجہ دوم کی عام مساوات سے دو خطوط مستقیم کی تعبیر۔  
تراش مخروط کے مرکز کے محدود کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لآ اور مآ سے ضرب دو تو

$$\text{ا لآ}^۲ + \text{ح لآ مآ} + \text{گ لآ} = ۰$$

$$\text{ح لآ مآ} + \text{ب مآ} + \text{ف مآ} = ۰$$

ان کو باہر یکدیگر جمع کرنے سے

$$\text{ا لآ}^۲ + ۲ \text{ح لآ مآ} + \text{ب مآ} + \text{گ لآ} + \text{ف مآ} = ۰$$

اس کو مساوات (۲) یعنی  $\text{ا لآ}^۲ + ۲ \text{ح لآ مآ} + \text{ب مآ} + \text{گ لآ} + ۲ \text{ف مآ} + \text{ج مآ}^۲$  میں سے وضع کرنے سے

$$\text{ج مآ}^۲ = \text{گ لآ} + \text{ف مآ} + \text{ج} \dots \dots \dots (۵)$$

اس مساوات میں لآ اور مآ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\text{ج مآ}^۲ = \text{گ} \frac{\text{ح ف} - \text{ب گ}}{\text{ا ب} - \text{ح}} + \text{ف} \frac{\text{گ ح} - \text{ا ف}}{\text{ا ب} - \text{ح}} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{ا ب ج} + ۲ \text{ف گ ح} - \text{ا ف} - \text{ب گ} - \text{ج ح}^۲}{\text{ا ب} - \text{ح}}$$

جملہ  $۱ب + ج + ۲ف + گ - ح - ۱ا - ۲ب - ۱گ - ۲ح - ۱ا$  سے تعبیر کیا جاتا ہے اور جملہ  $۱ا + ۲ح + ۱لا + ۲ب + ۱ا + ۲گ + ۱ا + ۲ف + ۱ج$  کا جمیع کیا جاتا ہے۔ جب ہم  $۱ا = ۰$ ،  $۲ح = ۰$  اور عام مساوات کا استحالہ  $۱ا + ۲ح + ۱لا + ۲ب + ۱ا = ۰$  میں ہوتا ہے جو دو خطوط مستقیم کی مساوات ہے۔ پس  $۱ا = ۰$  تراش مخروط کے دو خطوط مستقیم میں تحمل ہونے کی شرط ہے۔ صفحہ ۱۳۲ پر ہم نے یہی شرط ایک دوسرے طریقہ سے دریافت کی تھی۔ اوپر جو کچھ کہ بیان کیا گیا ہے مائل محوروں کے لیے بھی صادق آتا ہے۔

(۳) تراش مخروط  $۱ا + ۲ح + ۱لا + ۲ب + ۱ا = ۱$  کے محوروں کی وضع و مقدار کی تعیین۔

اگر کسی تراش مخروط کو کوئی ہم مرکز دائرہ قطع کرتا ہے تو نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے قطر اس تراش مخروط کے محوروں کے ساتھ مساوی زاویوں میں مائل ہونگے۔ اور باہرگیر منطبق ہونگے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر تراش مخروط کے دو نصف محوروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو۔

چونکہ تراش مخروط کی مساوات  $۱ا + ۲ح + ۱لا + ۲ب + ۱ا = ۱$  مانی گئی ہے

اور ہم مرکز دائرہ کی مساوات  $۱ا + ۲ح = ۱$  یعنی  $\frac{۱ا}{۱} + \frac{۲ح}{۱} = ۱$  ہے۔ پس مبداء اور تراش مخروط و دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط کی مساوات

$$۱ا + ۲ح + ۱لا + ۲ب + ۱ا = \frac{۱ا}{۱} + \frac{۲ح}{۱} = ۱$$

یعنی (۱)  $\frac{۱ا}{۱} + ۲ح + ۱لا + ۲ب + ۱ا = \frac{۱ا}{۱} + \frac{۲ح}{۱} = ۰ \dots (۱)$

اور یہ خطوط باہرگیر منطبق ہونگے اگر (۱)  $\frac{۱ا}{۱} + ۲ح + ۱لا + ۲ب + ۱ا = \frac{۱ا}{۱} + \frac{۲ح}{۱} = ۰$  (۲) ایسی حالت میں یہ خطوط نہ صرف آپس میں منطبق ہونگے بلکہ تراش مخروط کے دو محوروں میں سے کسی ایک محور کے ساتھ بھی منطبق ہونگے۔

پس مساوات (۲) کو حل کرنے سے تراش مخروط کے نصف محوروں کے طول (ص) کی تعیین ہو سکتی ہے۔ مساوات مذکور

$$\frac{1}{ص} - \frac{1}{(ب+ل)} + \frac{1}{ص} - لب - ح^2 = 0 \dots\dots\dots (۳)$$

$$\frac{(ب+ل) \pm \sqrt{(ب+ل)^2 - ۴(لب - ح^2)}}{۲} = \frac{1}{ص} \quad \text{اور}$$

$$\frac{(ب+ل) \pm \sqrt{(ب+ل)^2 - ۴(لب - ح^2)}}{۲} =$$

اب مساوات (۱) کو  $(\frac{1}{ص} - ل)$  سے ضرب دو تو

$$(\frac{1}{ص} - ل)^2 لا + ح^2 (\frac{1}{ص} - ل) + لا (\frac{1}{ص} - ل) (ب - \frac{1}{ص}) = 0$$

اگر  $\frac{1}{ص}$  مساوات (۲) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل ہے تو

$$(\frac{1}{ص} - ل)^2 لا + ح^2 (\frac{1}{ص} - ل) + لا (\frac{1}{ص} - ل) = 0$$

$$\therefore (\frac{1}{ص} - ل) (لا + ح + لا) = 0 \dots\dots\dots (۴)$$

پس اگر مساوات (۳) میں مساوات (۳) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل تعویض کی جائے تو اس کے متناظر مخروط کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

(و) درجہ دوم کی عام مساوات سے قطع مکانی کے محور اور

وتر خاص کی تعیین۔

اگر مساوات  $\frac{1}{ص} لا + ح^2 لا + ب^2 لا + ل^2 لا + ج = 0$  ایک قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے تو دوم درجہ کی رقیں مل کر ایک کامل مربع بناتی ہیں۔

ملاحظہ ہو صفحہ (۱۸۲) لہذا یہ مساوات

(۱) ..... = ج + ۲ ن + لا + ۲ گ + ۱ (ع + لا + هـ)

کے معادل ہے۔ جس میں  $\text{عہ}^2 = \text{ل}$  اور  $\text{پہ}^2 = \text{ب}$

مساوات (۱) پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ خط  $e$  لا + ب = ا کے

عمود کا مربع خط  $اگ + لا + ۲ف + ما + ج =$  پیر کے عمود کے متناسب ہے۔  
 ممکن ہے کہ یہ خطوط باہدگیر علی القوام نہ ہوں۔ لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل

$$(علا + ب + ج) = 2 \text{ ل} (علا + ب + ج) - (2 \text{ ل} + ج + علا)$$

یعنی (علا + با + لہ) = ۲ لا (لہ - گ) + ۲ ما (لہ - ن) + لہ - ج

لکھ سکتے ہیں اور خط منقسم جس کی مساوات  $علا + ہما + لہ =$  ہے مساوات

۲ لا (لہ ب۔ گ) + ۲ لا (لہ ب۔ ف) + لہ۔ ج =۔ واے خطِ مستقیم کے

۰ = علی القوائم واقع ہوتا ہے اگر  $\text{عہ} (\text{لہ عہ گ}) + \text{بہ} (\text{لہ بہ ف}) =$

$$\frac{(عہدہ + ہفت)}{۲۴ + ۲۴} = ۱$$

پس اب خطوط  $علا + ہما + ل = ۰$

اور ۲ (عہ - گ) لا + ۲ (بہ - ف) ما + ۲ - ج = کو علی الترتیب

لا اور ما کے محور مانو تو ہمیں مسا = ہم پ لا کے مائل مساوات حاصل ہوتی ہے۔

اور واضح ہے کہ یہ مساوات قطع مکانی کی ہے جس کے محذوؤں کے محور، متعین کا محور اور

منہجی کے راس پر کا خط حماس ہیں۔

وترغاص ۴ پے کی تسنیں کے لیے ہم خطۂ لا + با + لہ = پر کے عمود

علا + ہما + لہ کو ما تصور کرتے ہیں

اور خط ۲ (عہدہ - گ) ۱ + ۲ (پہلہ - ف) ۱ + ۱ (لہ - ج) = پر کے عمود

۲ (عدہ۔ گ) ۱+۲ (بدلہ۔ ف) ۱+۲-ج کو لا تصور کرتے ہیں۔

$$\left\{ \frac{2 \text{ (عہلہ - گ) } + 2 \text{ (بہلہ - ف)}}{2 \text{ (عہلہ - گ) } + 2 \text{ (بہلہ - ف)}} \right\} = \frac{2 \text{ (عہلہ + بہلہ)}}{2 \text{ (عہلہ + بہلہ)}} \text{ پس } 2 \text{ (عہلہ - گ) } + 2 \text{ (بہلہ - ف) } = 2 \text{ (عہلہ + بہلہ)}$$

$$\frac{۲ (۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ (۲ \text{ (بہ لہ - ف) } )}{(۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ \text{ (بہ لہ - ف) })} = ۲ \text{ پب}$$

اور اس لیے مساوات (۱) یعنی (عہ لا + بہ ما) + ۲ (گ لا + ۲ (ف لا + ج = ۰ ہے اور جس کا ایک قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ ہے اور جس کا وتر خاص

$$\frac{۲ (۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ (۲ \text{ (بہ لہ - ف) } )}{(۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ \text{ (بہ لہ - ف) })} = \frac{۲ (۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ (۲ \text{ (بہ لہ - ف) } )}{(۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ \text{ (بہ لہ - ف) })}$$

اس لیے کہ لہ =  $\frac{۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ (۲ \text{ (بہ لہ - ف) } )}{(۲ \text{ (عہ لہ - گ) } + ۲ \text{ (بہ لہ - ف) })}$

ذیل میں ہم نمونہ چند سوالات کو حل کر کے بتاتے ہیں کہ درجہ دوم کی مساوات سے تراش مخروط کی نوعیت وضع وغیرہ کیونکر دریافت ہو سکتی ہے۔

$$\text{مثال (۱) } ۱۰ \text{ لا} - ۱۲ \text{ لا} + ۸ \text{ ما} - ۶ \text{ لا} + ۱۲ \text{ ما} - ۱۲ = ۰$$

منحنی کے مرکز کے حدوداً 'ما' دریافت کرنے کے لیے ذیل کے ضابطے استعمال ہوتے ہیں:

$$۱۰ \text{ لا} + ج + ۸ \text{ ما} + گ = ۰ \quad ۱۲ \text{ لا} + ج + ۱۲ \text{ ما} + ف = ۰$$

$$\text{پس } ۱۰ \text{ لا} - ۱۲ \text{ لا} - ۶ \text{ ما} - ۳۲ = ۰ \quad \text{اور } ۱۰ \text{ لا} + ۸ \text{ ما} + ۱۲ = ۰$$

ان کو حل کرنے سے مرکز کے محدودوں کی قیمتیں لا = ۲ اور ما = ۰ حاصل ہوتی ہیں۔ مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالہ سے منحنی کی مساوات

$$۱۰ \text{ لا} - ۱۲ \text{ لا} + ۸ \text{ ما} + ج = ۰ \quad \text{ہے جس میں ج} = گ لا + ف ما + ج$$

$$\text{یعنی مساوات } ۱۰ \text{ لا} - ۱۲ \text{ لا} + ۸ \text{ ما} - ۸۰ = ۰ \quad \text{ہے۔}$$

$$\text{اس کو } \frac{۱۰}{۸۰} \text{ لا} - \frac{۱۲}{۸۰} \text{ لا} + \frac{۱۲}{۸۰} \text{ ما} = ۱ \quad \text{لکھ سکتے ہیں}$$

$$\text{یعنی } \frac{۱۰}{۸۰} \text{ لا} - \frac{۱۲}{۸۰} \text{ لا} + \frac{۱۲}{۸۰} \text{ ما} = ۱$$

پس تراش مخروط کے نصف محور مساوات  $\frac{1}{ص} - (ا + ب) \frac{1}{ص} + ا ب - ح = ۰$  کی اصلیں ہیں۔

$$\text{یعنی } \frac{1}{ص} - \left(\frac{1}{۱۰} + \frac{۱۶}{۸۰}\right) \frac{1}{ص} + \frac{۱۶}{۸۰} - \frac{۹}{۱۶۰} = ۰ \text{ کی اصلیں}$$

$$\therefore \frac{1}{ص} - \frac{۵}{۱۶} \frac{1}{ص} + \frac{1}{۶۴} = ۰ \text{ یعنی } ص = ۲۰ \text{ یا } ۶۴$$

$$\therefore ص = ۲ \text{ یا } ۱۶ \text{ اور مساوات } \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} = ۱$$

$\therefore$  تراش مخروط قطع ناقص ہے جس کے نصف محوروں کی قیمت ۲ اور ۱۶ ہے۔  
ان محوروں کی سمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات  $(ا - ب) \frac{1}{ص} + لا + ح = ۰$  استعمال کرنے سے اعظم محور کی مساوات  $\left(\frac{۱}{۱۶} - \frac{۱۶}{۸۰}\right) \frac{1}{ص} + لا + ح = ۰$  حاصل ہوتی ہے جس سے  $ا = ۲$  یا  $۱۶$  یعنی  $م = ۲$

$$\text{اور اقل محور کی مساوات } \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱۶}{۸۰}\right) \frac{1}{ص} + لا + ح = ۰ \text{ جس سے } ا = \frac{۱}{۲} \text{ یا } ۱۶ \text{ یعنی } م = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{مثال (۲) } ۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱ = ۰$$

اس مساوات میں دوسرے درجہ کی رتبوں سے ایک مکمل مربع بنتا ہے۔

$$\text{پس } (۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱) = ۰$$

$$\text{لہذا } (۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱) = ۰$$

$$= ۴ لا (۱ - ۲ لا + ۱.۵ لا - ۰.۲۵ لا) - ۱ = ۰$$

$$\text{خطوط } (۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱) = ۰ \text{ اور } (۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱) = ۰$$

$$\text{بارہواں علی القواعد ہونگے اگر } ۲ (۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱) = ۰$$

$$\text{یعنی اگر } لا = \frac{۱}{۲}$$

$$\therefore (۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱) = ۰ \text{ یا } (۴ لا - ۸ لا + ۶ لا + ۴ لا - ۱) = ۰$$

$۳۳ + ۱۱۶ + ۱۱۶ = ۲(۵ + ۱۸ - ۱۱۸)$   
 قطع مکانی کی مساوات ۲ = ۳ پ لاسے جبکہ قطع مکانی کے کسی نقطہ کا منحنی کے محور  
 سے عمودی فاصلہ ہے اور لا راس پر کے ماس سے اسی نقطہ کا عمودی فاصلہ۔

$$\text{پس } ۲ = \left( \frac{۴ + ۱۸ + ۱۱۸}{۲۸ + ۲۸} \right) \text{ پ ل } = \frac{(۳۳ + ۱۱۶ + ۱۱۶)}{۲۱۶ + ۲۱۶}$$

$$\text{یعنی } ۲ = \left( \frac{۴ + ۱۸ + ۱۱۸}{۲۱۸} \right) \text{ پ ل } = \frac{۳۳ + ۱۱۶ + ۱۱۶}{۲۱۶}$$

∴ ۲ = پ یعنی وتر خاص کی قیمت ۲ ہے۔

۵ = ۳۳ + ۱۱۶ + ۱۱۶ اور ۱۱۸ - ۱۱۸ = ۴ = قطع مکانی کے محور کی مساوات ہے اور ۳۳ + ۱۱۶ + ۱۱۶ = ۵ = منحنی کے راس پر کے ماس کی مساوات ہے۔ ان خطوں کے مشترک نقطہ کے محدود  
 راس کے محدود ہیں۔ پس ان کو حل کرنے سے لا کی قیمت -  $\frac{۳۴}{۳۲}$  اور لا کی قیمت  
 -  $\frac{۱۹}{۳۲}$  برآمد ہوتی ہے۔ اور یہی راس کے محدود ہیں۔

$$\text{مثال (۳) } ۵ - لا - ۱۱۸ + ۱۱۶ + ۲۱۶ + ۲۱۶ = ۲۰ - ۱۱۲ - ۱۱۲ = ۰$$

مرکز کی تعین کی مساواتیں ۱۲ لا - ۱۱۸ + ۲۱۶ = ۰ اور

$$۱۱۸ + لا - ۱۱۲ = ۰ ہیں۔ ان مساواتوں کو حل کرنے سے لا = ۲ اور لا = ۳$$

حاصل ہوتے ہیں۔ پس منحنی کا مرکز نقطہ (۲، ۳) ہے۔

اس مرکز میں سے گزرنے والے سابقہ محوروں کے متوازی محوروں کے  
 حوالہ سے منحنی کی مساوات

$$۵ - لا - ۱۱۸ + ۱۱۶ + ۲۱۶ + ۲۱۶ - ۲ \times \frac{۲۳}{۲} - ۳ \times ۱ - ۲۰ = ۰ ہے$$

$$\text{یعنی } ۵ - لا - ۱۱۸ + ۱۱۶ = ۰$$

اس لیے یہ مساوات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ (۲، ۳) پر متقاطع ہوتے ہیں۔  
 اگر ابتدائی مساوات میں لا کو صفر لکھیں تو مساوات ۵ - لا - ۱۱۲ + ۲۱۶ = ۰ حاصل ہوتی ہے۔

پس محمولہ بالا دو خطوط لا کے محور کو ایسے مقاموں پر قطع کرتے ہیں جہاں

$$۵ - لا - ۱۱۲ + ۲۱۶ = ۰ \text{ یعنی جہاں لا = ۲ اور لا = } \frac{۵}{۲}$$

$$(۳) لا - ۱۱۸ + ۱۱۶ + ۲۱۶ - ۱۱۸ + ۱۱۶ = ۰$$

منفی کے مرکز کے محددوں (لا، ما) کی تعیین

$$لا - لا + ما + ۸ = ۰ \text{ اور } لا + لا + ما + ۲۰ = ۰ \text{ سے ہوتی ہے}$$

$$\therefore لا = -۴ \text{ اور } ما = ۰$$

مرکز میں سے گزرنے والے ابتدائی محوروں کے متوازی محوروں کے حوالہ سے تراش مخروط کی مساوات

$$لا - لا + ما + ما - ۴ - ۱۵ = ۰ \text{ یعنی } لا - لا + ما + ما = ۱۹$$

اس تراش مخروط کے نصف محور مساوات  $\frac{1}{ص} - \frac{۲}{ص} + ۱ - \frac{۲۵}{ص} = ۰$  کی اصلیں ہیں۔

اس کو حل کرنے سے  $ص = \frac{۲}{۱}$  یا  $\frac{۲}{۲}$  جس سے  $ص = \frac{۱}{۲}$  یا  $\frac{۱}{۱}$ ۔  
چونکہ ایک نصف محور خیالی ہے اس لیے تراش مخروط قطع زائد ہے۔

اس کی حقیقی محور کی سمت مساوات  $(۱ - \frac{۲}{ص}) لا - \frac{۵}{ص} ما = ۰$  یعنی  $لا + ما = ۰$  سے حاصل ہوتی ہے۔

(ز) دوم درجہ کی عام مساوات سے قطع زائد کے متقاربوں

کی تعیین۔

صفحہ (۲۲۲) پر بتایا گیا ہے کہ قطع زائد اور اس کے متقاربوں کی مساواتوں میں صرف ایک مستقل کا فرق ہے۔

پس جب  $لا + لا + ما + ما + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۰$  .... (۱)  
تراش مخروط کی مساوات ہے۔

و  $لا + لا + ما + ما + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۰$  .... (۲)  
اس کے متقاربوں کی مساواتیں ہوں گی۔

بشرطیکہ کہ کو ایسی قیمت دی جائے جس کی وجہ سے مساوات (۲) دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

اس کے لیے مساوات کو محض لا کی دو درجی مساوات تصور کر کے اس کو حل کرتے ہیں  
لاحظہ ہو صفحہ (۱۳۳)۔

$$\text{چنانچہ } لا + لا + (۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲) + (۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲) = ۰$$

$$\therefore لا = \frac{-(۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲) \pm \sqrt{(۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲)^2 - 4(۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲)}}{2}$$







$$\begin{aligned}
 & \text{یعنی } لا^۲ (۱ + \frac{ج}{ص}) + ۲ح لا + ما^۲ (ب + \frac{ج}{ص}) = ۰ \\
 & \text{یہ خطوط باہم دیگر منطبق ہونگے اگر } (۱ + \frac{ج}{ص})(ب + \frac{ج}{ص}) - ح = ۰ \\
 & \therefore اب + \frac{اوج}{ص} + \frac{بج}{ص} + \frac{ج^۲}{ص^۲} - ح = ۰ \\
 & \text{یعنی } اب ص + ج ص + (ب + ج) ص - ص^۲ ح = ۰ \\
 & \therefore ص (اب + ج + (ب + ج) + (ح - اب - ج)) = ۰ \\
 & \text{پس } ص (اب + ج) + \frac{\Delta (ب + ج)}{اب - ح} + \frac{\Delta^۲}{۲(اب - ح)^۲} = ۰ \\
 & \therefore ص (اب + ج) + \Delta (ب + ج) + ۲(اب - ح) \Delta + \Delta^۲ = ۰ \\
 & \text{مثال - تراش مخروط دلا - ۲۶ لا + ۵ ما + ۱۱۰ - ۱۱۲۶ + ۱۱۰ = ۰ کے } \\
 & \text{نصف محوروں کی قیمتیں -}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & اب - ح = ۲۵ = ۲(۱۳) - ۱۴۲ \\
 & \Delta = اب ج + ۲ ف گ ح - ف ا - ب گ - ج ح = ۹۹۹ - ۱۲۵ - ۸۴۵ - ۱۶۹۰ + ۱۶۶۵ = ۹۵۰۲ \\
 & \therefore - (۱۴۲)^۳ ص + ۱۴۲ \times (۹۵۰۲) + (۹۵۰۲)^۲ = ۰ \\
 & \text{یعنی } ۱۲ ص - ۵۵ ص^۲ - ۳۶۳ = ۰
 \end{aligned}$$

$\therefore ص = \frac{۳۳}{۱۳}$  یا  $\frac{۱۱}{۱۳}$  پس منحنی قطع زائد ہے۔  
 بجائے ضابطہ استعمال کرنے کے پہلے مرکز کے محدود دریافت کر کے تعین کیا جائے  
 بل کرنا بہتر ہوگا۔ اس طرح عمل کرنے سے طالب علم کو معلوم ہوگا کہ مرکز کے محدود  
 لا = ۱ اور ما = ۰ ہیں۔

۱۔ مندرجہ ذیل محرومی تراشوں کی نوعیت اور ان کی وضعیں دریافت کرو:-

$$= 1 + 6x - 10x^2 + 6x^3 \quad (b)$$

$$= 199 + 619 + 0188 - 632 + 6022 - 0141 (ج)$$

$$= 40 + 69 - 114 - 64 - 60 - 64 \text{ (d)}$$

سم۔ لہ کی کیا قیمت ہونی چاہیے تاکہ مساوات

$$= 9 - 14 + 03, - 6 - 602 + 512$$

خطوط مستقیم کے ایک جوڑ کو تعبیر کرے۔

م - قلع زائد ۵۶ - ۵۵ - ۵۴ - ۵۳ - ۵۲ - ۵۱ - ۵۰

کے تقابلی دریافت کرو۔

اس قطع زائد کے مزدوج کی مساوات بھی لکھو۔

۵۔ ثابت کرو کہ اگر  $1, \alpha, \alpha^2$  +  $\alpha^3 + \alpha^4 + \dots = 1$  اور

$$1 = u_1' + u_2' + u_3'$$

ایک ہی تراشِ مخروط کو تعبیر کرتے ہیں اور محدودوں کے محور علی القوائم ہیں تو

$$Z^{r+1}(\bar{r} - r) = Z^r + (\bar{r} - r)$$

۶۔ ثنابت کرو کہ درجہ دوم کی عام مساوات جس تراشِ مخروط کو تعبیر کرتی ہے

وہ قائم قطع زائد ہے اگر  $k + 1 = 0$ ۔

۷۔ ثابت کرو کہ  $\lambda a + \lambda a + \lambda a + \dots = 0$  ایک قطع زائد کی عا

مساوات ہے جبکہ محدّدوں کے محور متقاربوں کے متوازی ہوئے ہیں۔

## تیسرا ہواں باب

کعبی اور عددی سرود کی مساواتوں کا عملی حل

۶۶- (۱) اکثر مساواتیں جن کی طبیعیات یا انجینیئری میں ضرورت ہوتی ہے تقریبی طریقہ پر حل کی جاسکتی ہیں۔ یہ مساواتیں عموماً دو قسم کی ہوتی ہیں :-  
 (۱) جبری مساواتیں از قسم  $لا + ولا + ب = جس میں م < ۲$   
 (۲) ماورائی مساواتیں۔ مثلاً  $لا + لوک لا = ب$ ،  $ولا + ولا = ج$ ،

$لا + لوجب لا + ب لوک لا = ج$  وغیرہ  
 قسم اول کی مساواتیں جبری طریقہ پر حل ہو سکتی ہیں بشرطیکہ  $م = ۳$  یا  $م = ۴$  لیکن یہ جبری طریقہ اکثر طویل اور وقت طلب ہوتے ہیں۔ تریسیمی طریقہ زیادہ آسان اور زود عمل ثابت ہوتا ہے۔ اگر جبری مساوات میں  $م$  کی قیمت  $۴$  سے زائد ہو تو اس کے جبری حل کا کوئی طریقہ نہیں دریافت ہوا ہے اور نہ ماورائی مساواتوں کا کوئی جبری طریقہ موجود ہے۔

تریسیمی طریقہ میں یا تو واحد طریق مرتسم کیا جاتا ہے یا ایک ہی کاغذ پر دو طریق مرتسم کر کے ان کے تقاطع کے نقطے دریافت کیے جاتے ہیں۔ واضح ہے کہ ان طریقوں سے مساواتوں کی صرف حتمی اصلیں معلوم ہو سکیں گی اور وہ بھی تقریبی طور پر۔ اس کے بعد تجلیلی ذرائع سے مدد لے کر ان اصولوں کی قیمت مطلوبہ درجہ صحت تک دریافت کی جاسکتی ہے۔

(ب) ہورنر (Horner) کا تقریبی طریقہ —

فرض کرو مساوات کثیر رقی ہے اور شکل ف (لا) = . لکھی جاسکتی ہے۔  
 (۱) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد  $m + 1$  دریافت کیے جائیں جن کے مابین مساوات ف (لا) = . کی ایک اصل عمہ واقع ہوتی ہے۔  
 (سر دست یہ فرض کیا جائے کہ ان دو متصل صحیح عددوں کے مابین کوئی دوسری اصل موجود نہیں ہے)۔

(۲) مساوات فم (ما) = . تیار کرو جس کی اصلیں مصرعہ بالا اصولوں سے بقدر کم ہوں۔ واضح ہے کہ اس نئی مساوات فم (ما) = . کی وہ اصل جو کہ تناظر ہے ف (ما) = . کی صرف ایک ہی ایسی اصل ہے جو صفر اور ۱ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے کہ نئی مساوات کی اصل سابقہ مساوات کی اصل سے بقدر کم کمتر ہے۔

(۳) حسابی عمل کی دقتوں سے بچنے کے لیے جو صفر اور ۱ کے مابین کسری اصل واقع ہونے سے پیدا ہوتی ہیں ایک مساوات فم (لا) = . تیار کی جائے جس کی اصلیں (ہر ایک) فم (ما) = . کی اصلوں کی وہ چند ہوں۔

واضح ہے کہ فم (لا) = . کی ایک اصل بوجہ عمل (۱) صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہے۔

(۴) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد  $m$  اور  $m + 1$  دریافت کرو جن کے مابین فم (لا) = . کی مطلوبہ اصل واقع ہے۔  
 پس مساوات ف (لا) = . کی اصل وہ بموجب طریقہ کتابت کے اعشاریہ  $m$ ،  $m + 1$  اور  $m$  کے درمیان واقع ہوگی۔

(۵) اسی طرح عمل کرتے ہوئے مساوات فم (ما) = . دریافت کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات ف (لا) = . کی اصلوں سے بقدر کم کمتر ہوں اور اس کے بعد مساوات فم (لا) = . معلوم کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات فم (ما) = . کی اصلوں کی وہ چند ہوں۔

پس ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے جس مقام تک صحت کے ساتھ اصل قیمت

دریافت کرنا مقصود ہو دریافت کی جاسکتی ہے۔

مثالی - مساوات ف (لا)  $\equiv ۲ لا^۳ - ۴ لا^۲ + لا + ۳ = ۰$   
کی ایک اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔ اعشاریہ کے دو مقاموں تک  
صحیح کے ساتھ اس کی قیمت دریافت کرو۔

(۱) چونکہ ف (۳) = ۲ اور ف (۴) = ۴ مساوات کی  
ایک اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔

(۲) ف (لا) = کی اصلوں سے بقدر ۳ کمتر اصلوں کی مساوات  
تیار کرنے کے لیے  $لا = ۳ - لا$  یعنی  $لا = ۳ + لا$  لکھو۔ پس

$$۲ (۳ + لا)^۲ - ۴ (۳ + لا)^۲ + (۳ + لا) + ۳ = ۰$$

$$\therefore \text{ف (لا)} \equiv ۲ لا^۲ + ۱۱ لا + ۱۳ - ۲ = ۰$$

(۳) ف (لا) = کی اصلوں کے وہ چند اصلوں کی مساوات  
بنانے کے لیے  $لا = ۱۰$  لکھو  
یعنی  $لا = \frac{لا}{۱۰}$  تب

ف (لا)  $\equiv لا^۳ + ۵۵ لا^۲ + ۶۵۰ لا - ۱۰۰۰ = ۰$   
(۴) آزمائش سے دریافت ہوتا ہے کہ ف (لا) = کی مطلوبہ  
اصل جو صفر اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے فی الحقیقت ۱ اور ۲ کے  
درمیان ہے۔

(۱) پس ۳ کی قیمت ۱ اور ۲ کے مابین ہے۔  
(۲) ف (لا) = کی اصلوں سے بقدر ۱ کمتر اصلوں والی مساوات  
تیار کرنے کے لیے

$$لا = ۱ - لا$$

$$۱ (۱ + لا) + ۵۵ (۱ + لا)^۲ + ۶۵۰ (۱ + لا) - ۱۰۰۰ = ۰$$

یعنی ف (لا)  $\equiv ۵۸ لا^۲ + ۱۶۶۳ لا - ۲۹۴ = ۰$   
(۳) ف (لا) = کی اصلوں کی وہ چند اصلوں والی مساوات تیار کرنے کے  
لیے  $لا = ۱۰$  یعنی  $لا = \frac{لا}{۱۰}$  لکھو۔ تب

ف (۱۱)  $\equiv ۱۰^۳ + ۱۰^۵ + ۱۰^۷ + ۱۰^۹ - ۱۰^{۱۱} = ۲۹۴۰۰۰$   
 (۱۱) آزادانہ سے ف (۱۱) کی مطلوبہ اصل جو صفر اور ۱۰ کے مابین واقع ہے فی الحقیقت ۳ اور ۴ کے درمیان ہے۔

پس عہ کی قیمت ۳۱۳ اور ۳۱۴ کے درمیان ہے۔  
 اسی طریقہ عمل سے اگر ہم چاہیں تو اعشاریہ کے مزید مقاموں تک صحت کے ساتھ عہ کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔

(ب) مصرعہ بالا طریقہ اگر براہ راست استعمال کیا جائے تو بہت ہی طویل اور تکلیف رساں پایا جاتا ہے۔ اس لیے ذیل میں ایسے طریقے درج کیے جاتے ہیں جن سے (۱) کثیر رقمی جملوں کی اختصاری تقسیم اور (۲) ایسی مساوات کی تعیین جس کی اصلیں کسی دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ایک معینہ حقیقی عدد کے کمتر ہوں، باسانی حل میں آسکے۔

(۱) کثیر رقمی جملہ  $۱۰^۱ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + \dots + ۱۰^n$  کی تقسیم (۱۱-ح) سے بذریعہ طریقہ اختصار۔

$$\text{فرض کرو کہ } ۱۰^۱ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + \dots + ۱۰^n \equiv$$

(۱۱-ح)  $(۱۰^۱ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + \dots + ۱۰^n) + س$  (جس میں  $س$  باقی مساوات کے ہر دو ارکان کے لاکھ مختلف قوتوں کے سرفوں کو متعادل کھینے سے

$$\begin{array}{ll} ۱۰^۱ = ب & ۱۰^۱ = ب - ب ح \\ ۱۰^۲ = ب + ۱۰^۱ & ۱۰^۲ = ب - ب ح + ب ح \\ ۱۰^۳ = ب + ۱۰^۲ & ۱۰^۳ = ب - ب ح + ب ح ح \\ ۱۰^۴ = ب + ۱۰^۳ & ۱۰^۴ = ب - ب ح + ب ح ح ح \\ \dots & \dots \end{array}$$

$۱۰^n = س - ب - ب ح - ب ح ح - \dots - ب ح^{n-1}$   
 پس دیے ہوئے کثیر رقمی جملہ کے سرفوں کو ایک قطار میں لکھ ڈالو۔ اس قطار کے نیچے ایک اور قطار کی جگہ چھوڑ کر ایک خط کھینچو۔ خط کے نیچے اور ۱۰ کے





$$= ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح)$$

$$= (لا-ح) \{ ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) \}$$

جس سے واضح ہے کہ ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) کو (لا-ح) پر تقسیم کرنے سے ۱. (لا-ح) رہتا ہے۔

اگر ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) کو (لا-ح) پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) بن جائے۔

ہوتا ہے تو (لا-ح) (۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح))

$$= ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح)$$

پس (۱) اور (۲) مساواتوں سے

$$(لا-ح) (۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح))$$

$$= ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح)$$

مساوات کے دونوں ارکان سے ۱. (لا-ح) کو قلمزد کر کے باقی ماندہ جملوں کو (لا-ح) پر تقسیم کرنے سے

$$۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح)$$

$$= ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح)$$

پس واضح ہے کہ ۱. (لا-ح) + ۱. (لا-ح) + ..... + ۱. (لا-ح) کو (لا-ح) پر

تقسیم کرنے کے بعد جو باقی رہتا ہے وہ ۱. (لا-ح) ہے۔ اسی طرح تقسیم کا عمل جاری رکھ کر مطلوبہ مساوات کے تمام سروں کو دریا کر سکتے ہیں۔

مثال - ایک ایسی مساوات کی تعیین جس کی ہر ایک اصل مساوات

$$3 \text{ لا}^3 - 4 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} - 3 = 0 \text{ کی ہر حقیقی اصل سے بقدر ۵}$$

کمتر ہے -  
مصرعہ بالا طریقہ کے بموجب

$$\begin{array}{r} (۱) \quad \begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \\ 210 \quad 20 \quad 15 \\ \hline 3 \quad 22 \quad 8 \end{array} \\ 3 \equiv \underline{206} \end{array}$$

$$(۲) \quad \begin{array}{r} 115 \quad 15 \\ 23 \quad 3 \\ \hline 3 \equiv \underline{154} \end{array}$$

$$(۳) \quad \begin{array}{r} 15 \\ 38 \quad 3 \\ \hline 3 \equiv \underline{38} \end{array}$$

$$3 \equiv 0$$

پس مطلوبہ مساوات  $3 \text{ لا}^3 + 38 \text{ لا}^2 + 154 \text{ لا} + 206 = 0$  ہے  
مثال کے طور پر مساوات  $3 \text{ لا}^3 - 4 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا} - 3 = 0$  کی ایک  
حقیقی اصل مندرجہ بالا طریقوں سے اعشاریہ کے چوتھے مقام تک محسوب  
کی جاتی ہے :-

آزمائش سے (یا تریسی طریقے سے) پتہ چلتا ہے کہ مساوات کی ایک اصل  
۴ اور ۵ کے مابین واقع ہے لہذا دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ۴ کمتر  
اصلوں والی مساوات حاصل کی جاتی ہے اور جدول ایک جدول کی شکل میں ترتیب  
دیا جاتا ہے -

اصلی نمبر کمی بقدر	۱)	۱۷-	۷	۵	۱	ف (۱۷)
	۲۰-	۱۲	۴-	۴		
	<u>۹</u>	۵-	۳	۱-	۱	
		۶۰	۱۲	۴		
		<u>۵۵</u>	۱۵	۳	۱	
۴			۲۸	۴		
			<u>۲۳</u>	۷	۱	
				۴		
				<u>۱۱</u>	۱	ف (۱۷)
۱	۹۰۰۰۰-	۵۵۰۰۰	۴۳۰۰	۱۱۰	۱	ف (۱۷)
	۵۹۴۱۱	۴۴۱۱	۱۱۱	۱		
	<u>۳۰۵۸۹-</u>	۵۹۴۱۱	۴۴۱۱	۱۱۱		
		۴۵۲۳	۱۱۲	۱		
		<u>۶۳۹۴۲</u>	۴۵۲۳	۱۱۲		
۴			۱۱۳	۱		
			<u>۴۶۴۶</u>	۱۱۳		
				۱		
				<u>۱۱۴</u>	۱	ف (۱۷)
۴	۳۰۵۸۹۰۰۰۰-	۶۴۹۴۴۰۰۰	۴۶۴۴۰۰	۱۱۴۰	۱	ف (۱۷)
	۴۶۴۴۴۸۱۶	۱۸۷۶۷۰۴	۴۵۷۶	۴		
	<u>۴۴۶۶۴۱۸۴-</u>	۶۵۸۰۶۷۰۴	۴۶۸۱۷۶	۱۱۴۴	۱	
		۱۸۹۱۰۷۲	۴۵۹۲	۴		
		<u>۶۷۶۹۷۷۷۶</u>	۴۷۴۷۸	۱۱۴۸	۱	
۴			۴۶۰۸	۴		
			<u>۴۷۷۴۷۶</u>	۱۱۵۲	۱	
				۴		
				<u>۱۱۵۶</u>	۱	ف (۱۷)
۴	۴۶۶۶۴۱۸۴۰۰۰۰-	۶۷۶۹۷۷۷۰۰۰	۴۷۷۴۷۰۰	۱۱۵۶۰	۱	ف (۱۷)
	۴۰۷۹۰۷۷۰۷۸۵۶	۲۸۶۸۴۱۹۷۶	۶۹۴۹۶	۶		
	<u>۱۸۷۶۴۱۲۴۱۴۴-</u>	۶۷۸۸۴۶۱۷۹۷۶	۴۷۸۰۹۹۹۶	۱۱۵۶۶	۱	
		۲۸۷۲۵۸۵۶۸	۶۹۴۴۲	۶		
		<u>۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴</u>	۴۷۸۷۶۴۲۸	۱۱۵۷۲	۱	
۴			۶۹۴۶۸	۶		
			<u>۴۷۹۴۵۸۹۶</u>	۱۱۵۷۸	۱	
				۶		

پہلے سیاہ دبیز خط کے نیچے کی مساوات فن (لا) = ۰ کی اصلیں مساوات فن (ما) = ۰ کی اصلوں کے بالترتیب وہ چند ہیں۔

اس کے بعد آڑا کر دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات فن (لا) = ۰ کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے فن (لا) = ۰ کی اصلوں کو بقدر اگٹھا کر نئی مساوات فن (ما) = ۰ تیار کی جاتی ہے۔ اس طرح عمل کے بقیہ مراتب انجام پاتے ہیں اور دی ہوئی مساوات کی اصل ۴۶۲۳۰۰۰ ۱۴۱۴ برآمد ہوتی ہے۔

نوٹ :- پہلے دو تین استوائے تکمیل پانے کے بعد بائیں جانب کے سب سے آخری باقی سے عین پہلے کے باقی پر آخری باقی کو تقسیم کر کے اصل کا اعشاریہ کے بعد کا دوسرا ہندسہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً ۸۹۰۰۰۰ کو ۳۰۵ پر تقسیم کرنے سے ہندسہ ۴ حاصل آتا ہے۔

معیناً جب یہ مقسوم علیہ دریافت طلب ہندسوں کی تعداد سے دو زائد ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے تو حسابی عمل میں حسب ذیل اختصار قائم کیا جاسکتا ہے :-

صفروں کے بڑھانے کے عوض آخری سر سے عین پہلے کے سر کا آخری ہندسہ قلمزد کر دیا جائے اور اس سے عین پہلے کے سر کے آخری دو ہندسے قلمزد کیے جائیں وغیرہ وغیرہ۔ پس دوسرے دبیز خط کے نیچے کا حسابی عمل اختصار کے ساتھ یوں لکھا جاسکتا ہے :-

$$\begin{array}{r}
 ۴۶۲۳۰۰۰ \quad ۱۴۱۴ \quad ۳۰۵۸۹ \quad (۴۶۱۴۶۳) \\
 \underline{۱۸۲} \\
 ۲۷۳۰۸ \\
 \underline{۳۲۸۱} \quad ۶۵۷۷ \\
 ۲۰۵۶ \quad ۱۸۲ \\
 \underline{۲۲۵} \quad ۶۷۶۶ \\
 ۲۰۱ \\
 \underline{۲۴}
 \end{array}$$

پہلی مرتبہ جب ہندسوں کو قلمزد کرتے ہیں تو پہلے اور دوسرے سر ساقط ہو جاتے ہیں۔ جب دوسری مرتبہ ہندسے قلمزد کیے جاتے ہیں تو تمام سرسوں کو آخری دو کے ساقط ہو جاتے ہیں اور اس کے بعد کا عمل معمولی اختصاری تقسیم کے ذریعہ اختتام کو پہنچتا ہے۔

۱۷۔ کبھی مساواتوں کے حل سے پہلے مناسب معلوم ہوتا ہے کہ مساوات سے متعلق چند مفید کلیات و واقعات کا محض ذکر کر دیا جائے۔ ان کا ثبوت نصاب نے باہر ہونے کی وجہ سے غیر ضروری ہے۔ البتہ شوقین طالب علم مستند کتابوں میں ان کا مطالعہ کر سکتا ہے۔

(۱) ہر ایسی مساوات کی جو بشکل  $f(x) = 0$  لکھی جاتی ہے ایک اصل ضروری ہوتی ہے خواہ وہ حقیقی ہو یا خیالی۔

(۲)  $n$ ۔ ویں درجہ کی ہر مساوات کی  $n$  ہی اصلیں ہوتی ہیں۔  $n$  سے

زیادہ نہیں۔

(۳) اگر مساوات  $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

ہو تو وہ شکل  $x^n + \frac{a_1}{x} x^{n-1} + \frac{a_2}{x^2} x^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} = 0$  لکھی جاسکتی ہے اور اگر  $e$  یہ 'جہ'.... کہ اس کی اصلیں ہوں تو مساوات متماثلًا

$(x - e)(x - e_1)(x - e_2) \dots (x - e_{n-1}) = 0$  کے مساوی ہے۔

پس  $e = -\frac{a_1}{a_n}, e = -\frac{a_2}{a_n}, e = -\frac{a_3}{a_n}, \dots, e = -\frac{a_n}{a_n}$

اور  $e = -\frac{a_1}{a_n}, e = -\frac{a_2}{a_n}, \dots, e = -\frac{a_n}{a_n}$

طالب علم کو شاید یہ خیال ہوگا کہ چونکہ مندرجہ بالا ردابط کی تعداد مساوات کی اصلوں کی تعداد کے برابر ہے اس لیے ہر ایک مساوات حل کی جاسکتی ہے۔ لیکن حقیقت حال اس سے بہت مختلف ہے۔ اس لیے کہ اگر  $n$  اصلوں میں سے  $n-1$  کو سا قط کر کے باقی ماندہ یعنی  $n-1$  ویں اصل کی تعیین کے لیے مساوات تیار کی جائے تو چونکہ یہ مقادیر ہر ایک مساوات میں تشاکلاً شامل ہیں لہذا ہمیشہ ایسی ہی مساوات حاصل ہوگی جس کے سرابتدائی مساوات کے سر میں۔ (۴) حقیقی سرسوں کی مساوات میں خیالی اصلوں کے زوج ہوتے ہیں۔

(۵) منطقی سروں کی مساوات میں اصم اصولوں کے زوج ہوتے ہیں۔  
 (۶) مساوات ف (لا) = کی مثبت اصولوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ  
 اتنی ہی ہو سکتی ہیں جتنی کہ جملہ ف (لا) میں علامات کی تبدیلیاں ہیں اور اس کی  
 منفی اصولوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہو سکتی ہے جتنی کہ جملہ ف (لا) میں  
 علامات کی تبدیلیاں ہیں۔ یہ کلیہ ڈیکارٹس (Descartes) کا علامتوں  
 کا قانون یا قاعدہ کہلاتا ہے۔  
 (۷) طاق درجہ کی ہر مساوات کی کم از کم ایک حقیقی اصل ہوتی ہے  
 جس کی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔  
 (۸) اگر کسی مساوات کا درجہ جفت اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس کی  
 کم از کم دو اصلیں حقیقی ہونگی جن میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔

۶۸۔ کبھی مساواتیں - کارڈان (Cardan) کا حل۔

فرض کرو کہ کبھی مساوات  $x^3 + px + q = 0$  ..... (۱) ہے  
 جس میں  $x^3$ ،  $x$  اور  $q$  عام طور پر ملتے (Complex) اعداد ہیں۔  
 اب بجائے  $x$  کے  $y + z$  لکھو ..... (۲)

$$تب \quad y^3 + (y+z)^3 + 3(y+z)^2 + (y+z) + q = 0$$

$$یعنی \quad y^3 + (y+z)^3 + 3(y+z)^2 + (y+z) + q = 0$$

$$+ (y+z)^3 + 3(y+z)^2 + (y+z) + q = 0 \quad (۳)$$

مقصود یہ ہے کہ جملہ سے رقم جس میں  $y$  شریک ہے معدوم ہو جائے  
 پس  $y$  کی قیمت ایسی ہونی چاہیے کہ

$$y^3 + (y+z)^3 = 0 \quad \text{یعنی} \quad y = -z$$

مساوات (۳) کو  $y$  پر تقسیم کرنے سے

مساوات ۳ + ۳پ + ۱ + ق = ۰ .... (۴) حل ہوتی ہے۔  
اور یہ کئی مساوات کی معیاری شکل ہے۔  
اس کے حل کے لیے فرض کرو کہ ۱ + ۳ = ۰

۰ = ۳ + ۳ + ۳ (۱ + ۳) + ق = ۰ .... (۵)  
چونکہ ہمیں دو غیر معلوم مقادیر سے سابقہ پڑا ہے اس لیے ہم ان  
اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ وہ رابطہ (۵) کی تطبیق کرے اور نیز رابطہ

$$۰ = ۳ + ۳ + ۱ + ق \quad (۶)$$

$$(۵) \text{ اور } (۶) \text{ سے } ۳ + ۳ + ۱ + ق = ۰ \quad (۷)$$

مساوات (۷) میں وکی قیمت - ۳ درج کرنے سے ۳ - ۳ + ق = ۰  
یعنی ۳ + ق - ۳ = ۰

$$\therefore ۳ = \frac{۳ - ق + ۳}{۲}$$

۳ کی ان دو قیمتوں میں سے مثبت علامت کی ایک قیمت لو  
لیجئے ۳ =  $\frac{۳ - ق + ۳}{۲}$  لکھو۔

$$\therefore ۳ = \frac{۳ - ق + ۳}{۲} \quad \text{جبکہ } ۰ = \frac{۳ - ق + ۳}{۲}$$

از روئے رابطہ (۶)

$$\text{معینہ } ۳ = \frac{۳ - ق + ۳}{۲} \quad \text{جبکہ } ۰ = \frac{۳ - ق + ۳}{۲}$$

$$\text{اور } ۳ = \frac{۳ - ق + ۳}{۲} \quad \text{جبکہ } ۰ = \frac{۳ - ق + ۳}{۲}$$

$$\therefore ۳ = (۳ + ۳) = \frac{۳ - ق + ۳}{۲} + \frac{۳ - ق + ۳}{۲}$$



$$\text{یا } \sqrt[3]{\frac{(-ق + \sqrt{ق^2 + ۴پ۳})}{۲}} + \sqrt[3]{\frac{(-ق - \sqrt{ق^2 + ۴پ۳})}{۲}} \text{ سے اور } \sqrt[3]{\frac{(-ق + \sqrt{ق^2 + ۴پ۳})}{۲}} - \sqrt[3]{\frac{(-ق - \sqrt{ق^2 + ۴پ۳})}{۲}} \text{ سے}$$

جن میں سے اور سے اکائی کے خیالی جذر الکعب ہیں۔  
(۱) اگر  $ق^2 + ۴پ۳$  مثبت ہے تو  $ع^۳$  اور  $و^۳$  دونوں حقیقی ہیں۔  
فرض کرو کہ  $ع$  اور  $و$  بالترتیب  $ع^۳$  اور  $و^۳$  کے حسابی جذر الکعب ہیں۔ تب  
کبھی مساوات کی اصلیں

$ع + و^۳ + ۶ + ۳ع + ۳و + ۳و + ۳ع$  اور  $و + ۳و + ۳ع + ۳و + ۳ع$   
ان میں کی پہلی اصل  $(۶ + و)$  حقیقی ہے اور سے اور سے کی قیمتیں  
درج کرنے سے باقی ماندہ دو اصلیں

$$\sqrt[3]{\frac{۶ + و}{۲}} + \sqrt[3]{\frac{۶ - و}{۲}} \text{ اور } \sqrt[3]{\frac{۶ + و}{۲}} - \sqrt[3]{\frac{۶ - و}{۲}}$$

ہو جاتی ہیں۔  
(۲) اگر  $ق^2 + ۴پ۳$  صفر ہے تو  $ع^۳ = و^۳$  اور  $ع = و$  اور  
اصلیں  $۶ + ۶ + ۳(ع + ع) + ۳(ع + ع) + ۳(ع + ع) + ۳(ع + ع)$  اور  $۶ - ۶ - ۳(ع - ع) - ۳(ع - ع) - ۳(ع - ع) - ۳(ع - ع)$   
ہو جاتی ہیں۔

(۳) اگر  $ق^2 + ۴پ۳$  منفی ہے تو  $ع^۳$  اور  $و^۳$  خیالی جملے ہو جاتے  
ہیں اور  $ع + ۳و + ۳و + ۳ع$  اور  $و + ۳و + ۳ع + ۳و + ۳ع$  کی صورت اختیار کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ  
ان مقادیر کے جذر الکعب  $م + ۳ن$  اور  $م - ۳ن$  ہیں۔ تب کبھی مساوات  
کی اصلیں

$$\begin{aligned} & م + ۳ن + م - ۳ن - ۳(م + ۳ن) - ۳(م - ۳ن) - ۳(م + ۳ن) - ۳(م - ۳ن) \\ & \text{یعنی } ۲م - ۳ن - ۳(م + ۳ن) - ۳(م - ۳ن) \\ & \text{یعنی } ۲م - ۳ن - ۳(م + ۳ن) - ۳(م - ۳ن) \end{aligned}$$

ہیں۔

جو سب کے سب حقیقی مقادیر ہیں لیکن چونکہ خیالی مقادیر کے جذر الکعب کی ٹھیک قیمت دریافت کرنے کا کوئی عام حسابی یا جبری طریقہ موجود نہیں ہے اس لیے کارڈان کے طریقہ کا حل عملی نقطہ نظر سے کچھ سودمند نہیں ہوتا ہے جبکہ کبھی مساوات کی تینوں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوتی ہیں۔ پس اس صورت کو کارڈان کے حل کی ناقابل تھوپی صورت کہتے ہیں۔

واضح ہو کہ ہر حالت میں کبھی مساوات کی حقیقی اصلیں کارڈان کے حل کی بہ نسبت ہوہر نو کے تقریبی طریقہ سے زیادہ آسانی کے ساتھ دریافت کی جاسکتی ہیں۔

مثال - مساوات  $x^3 - 11x - 6 = 0$  کو حل کرو ..... (۱)

چونکہ مساوات معیاری شکل کی ہے (یعنی  $x$  کی رقم معدوم ہے)

لہذا فرض کرو  $x = u + v$  ..... (۲)

$\therefore u^3 + v^3 + 3(u+v)(u^2 + v^2 + uv) - 11(u+v) - 6 = 0$  ..... (۳)

$u + v$  اور  $u^2 + v^2 + uv$  ایسے منتخب کرو کہ  $u^3 + v^3 - 11(u+v) - 6 = 0$  ..... (۴)

$\therefore u^3 + v^3 - 11 = 0$  ..... (۵) از روئے (۳) اور (۴)

(۴) اور (۵) کے مابین  $u$  کو ساقط کرو۔

$$\therefore u^3 + \frac{8}{u^3} - 11 = 0$$

$$\text{یعنی } u^6 - 11u^3 + 8 = 0$$

$$\therefore u^3 = 1 \text{ اور اس لیے } u = 1 \text{ 'سہ' 'سہ'}$$

پس  $u$  کی متناظر قیمتیں رابطہ (۴) کی رو سے

$$u = 1, 2, 2 \text{ 'سہ' 'سہ' 'سہ' ہونگی۔}$$

پس دی ہوئی مساوات کی تین اصلیں  $u = 1, 2, 2 \text{ 'سہ' 'سہ' 'سہ'}$  ہیں۔

## تیرہویں باب کی مثالیں

(۱) - ہوہر نو کے تقریبی طریقہ سے ذیل کی مساواتوں کی مثبت اصلیں اشارہ کیے

چوتھے مقام تک دریافت کرو۔

$$(۱) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰$$

$$(ب) \quad ۲ - ۱۶ = ۰$$

$$(ج) \quad ۱۳۷۹ - ۱۱۶۵۸ + ۱۴۹۱ = ۰$$

$$(۲) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰ \quad \text{کی منفی اصل (جو صفر اور -۱ کے درمیان واقع ہے) دریافت کرو۔}$$

(۳)  $۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰$  کی حقیقی اصلیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک دریافت کرو۔

$$(۴) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰ \quad \text{کی حقیقی اصلیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک دریافت کرو۔}$$

$$(۵) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰ \quad \text{کی حقیقی اصلیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک دریافت کرو۔}$$

$$(۶) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰ \quad \text{کی حقیقی اصلیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک دریافت کرو۔}$$

$$(۱) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰$$

$$(ب) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰$$

$$(ج) \quad ۱۶ - ۳۱ + ۱۲ - ۱۶ = ۰$$

$$(۷) \quad \text{فین ڈیروال (Van der Waals) کی مساوات}$$

$$(د) \quad \left( \frac{1}{V} + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = \frac{RT}{P}$$

کو (جس میں  $V$  اور  $P$  گیس کا دباؤ اور حجم ہیں) ت مطلق تپش اور  $a$ ،  $b$  متقل

مقادیر ہیں) بطور  $V$  کی کعبی مساوات کے ترتیب دے کر حل کرو جبکہ اس کی

تینوں اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں یعنی گیس کا فاصل (Critical) حجم دریافت کرو۔

[جواب =  $3b$ ]

$$(۸) \quad \text{اس طرح کلاؤسیوس (Clausius) کی مساوات}$$

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

کو (جس میں  $V$  اور  $P$  بالترتیب گیس کا دباؤ و حجم اور مطلق تپش ہیں اور  $a$ ،  $b$  متقل

مقادیر ہیں) بطور  $V$  کی کعبی مساوات کے ترتیب دے کر بناؤ کہ

گیس کا فاصل حجم  $۳b + ۲b$  ہے۔

## پہلو دھواں باب

مثالی سلسلوں کے حاصل جمع جب لا اور جم لا کے سلسلے  
اور زائیدی تفاعیل

۶۹- (۱) سلسلہ جم  $ع + جم (ع + ب) + جم (ع + ۲ ب) + \dots$   
کی ن رقموں کا حاصل جمع -

فرض کرو  $س = جم ع + جم (ع + ب) + جم (ع + ۲ ب) + \dots$  ن رقموں تک  
اس سلسلہ کی عام رقم یعنی  $ر$  - ویں رقم  $جم \{ ع + (ر - ۱) ب \}$  ہے -

$\therefore س = جم ع + جم (ع + ب) + \dots + جم \{ ع + (ن - ۱) ب \} + \dots$

$+ جم \{ ع + (ن - ۱) ب \}$   
اس مساوات کے دونوں ارکان کو  $۲$  جب  $\frac{۲}{۲}$  سے ضرب دو -

تب  $۲ س = ۲ جب ع + ۲ جم ع جب \frac{۲}{۲} + ۲ جم (ع + ب) جب \frac{۲}{۲} + \dots$

$+ ۲ جم \{ ع + (ر - ۱) ب \} جب \frac{۲}{۲} + \dots$   
 $+ ۲ جم \{ ع + (ن - ۱) ب \} جب \frac{۲}{۲}$

$۲ جب \frac{۲}{۲} = جب (ع + \cancel{\frac{۲}{۲}}) - جب (ع - \cancel{\frac{۲}{۲}})$

$+ جب (ع + \cancel{\frac{۲}{۲}}) - جب (ع + \cancel{\frac{۲}{۲}})$

$$\begin{aligned}
 & + \text{جب } (ع + \frac{ع}{۲}) - \text{جب } (\frac{ع}{۲} + ع) \\
 & + \dots + \\
 & + \text{جب } \{ع + \frac{ع}{۲}(۱-ن)\} - \text{جب } \{ع + \frac{ع}{۲}(۳-ن۲)\} \\
 & = \text{جب } \{ع + \frac{ع}{۲}(۱-ن)\} - \text{جب } (ع - \frac{ع}{۲}) \\
 & \therefore \text{سن} = \frac{\text{جم } ۲ \{ع + \frac{ع}{۲}(۱-ن)\} - \text{جب } \frac{ع}{۲}}{\text{جب } \frac{ع}{۲}}
 \end{aligned}$$

(ب) سلسلہ جب ع + جب (ع + ع) + جب (ع + ۲ ع) + .....  
کی ن رقموں کا حاصل جمع -

فرض کرو سن = جب ع + جب (ع + ع) + ..... +

+ جب {ع + (۱-ن) ع} +  
مساوات کے دونوں ارکان کو ۲ جب ع سے ضرب دو -

تب ۲ جب ع سن = ۲ جب ع جب ع + ۲ جب (ع + ع) جب ع + ..... +

+ ۲ جب {ع + (۱-ن) ع} جب ع +

$$= \text{جم } (ع - \frac{ع}{۲}) - \text{جم } (\frac{ع}{۲} + ع)$$

$$+ \text{جم } (\frac{ع}{۲} + ع) - \text{جم } (\frac{ع}{۲} + ع)$$

$$+ \dots +$$

$$+ \text{جم } \{ع + \frac{ع}{۲}(۳-ن۲)\} - \text{جم } \{ع + \frac{ع}{۲}(۱-ن)\}$$

$$= \text{جم } (ع - \frac{ع}{۲}) - \text{جم } \{ع + (\frac{۱}{۲} - ن) ع\}$$

$$\therefore \text{سن} = \frac{\text{جب } \left\{ \frac{\pi}{2} (1-n) + \frac{\pi}{2} \right\}}{\text{جب } \frac{\pi}{2}}$$

### سوالات نمبر (۱)

(۱) مندرجہ ذیل سلسلوں کی  $n$  رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

(۱)  $\text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۴ ط + \text{جم } ۶ ط + \dots$

(ب)  $\text{جب } ط + \text{جب } ۲ ط + \text{جب } ۵ ط + \dots$

(۲) ذیل کے سلسلوں کی  $n$  رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

(۱)  $\text{جم } ع - \text{جم } (ع + ب) + \text{جم } (ع + ۲ ب) - \text{جم } (ع + ۳ ب) + \dots$

(ب)  $\text{جب } ع - \text{جب } (ع + ب) + \text{جب } (ع + ۲ ب) - \text{جب } (ع + ۳ ب) + \dots$

[ہدایت:  $\pi = ۳ + \frac{1}{2} \text{ لکھو}$ ]

(۳) ذیل کے سلسلوں کی  $n$  رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

(۱)  $\text{جم } ط + \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۳ ط + \dots$

(ب)  $\text{جب } ط + \text{جب } ۲ ط + \text{جب } ۳ ط + \dots$

[ہدایت:  $\text{جم } ۲ ط + ۱ = \dots$ ]

اور  $\text{جب } ۲ ط = \frac{۱ - \text{جم } ۲ ط}{۲}$  [لکھو]

(۴) ثابت کرو کہ

$$\text{سن } ط = \frac{\text{جب } ط + \text{جب } ۲ ط + \text{جب } ۵ ط + \dots + \text{جب } (۱-n) ط}{\text{جم } ط + \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۵ ط + \dots + \text{جم } (۱-n) ط}$$

(ج) سلسلہ  $\text{قم } ط + \text{قم } ۲ ط + \text{قم } ۴ ط + \dots$  کی  $n$  رقموں کا

حاصل جمع -

$$\text{چونکہ } \text{قم } ط - \text{قم } \frac{1}{2} ط = \frac{1}{2} ط \text{ جب } \frac{1}{2} ط - \frac{1}{4} ط = \frac{1}{4} ط \text{ جب } \frac{1}{4} ط - \frac{1}{8} ط = \frac{1}{8} ط \text{ جب } \frac{1}{8} ط - \frac{1}{16} ط = \frac{1}{16} ط \text{ جب } \frac{1}{16} ط - \frac{1}{32} ط = \frac{1}{32} ط \text{ جب } \frac{1}{32} ط - \frac{1}{64} ط = \frac{1}{64} ط \text{ جب } \frac{1}{64} ط - \frac{1}{128} ط = \frac{1}{128} ط \text{ جب } \frac{1}{128} ط - \frac{1}{256} ط = \frac{1}{256} ط \text{ جب } \frac{1}{256} ط - \frac{1}{512} ط = \frac{1}{512} ط \text{ جب } \frac{1}{512} ط - \frac{1}{1024} ط = \frac{1}{1024} ط \text{ جب } \frac{1}{1024} ط - \frac{1}{2048} ط = \frac{1}{2048} ط \text{ جب } \frac{1}{2048} ط - \frac{1}{4096} ط = \frac{1}{4096} ط \text{ جب } \frac{1}{4096} ط - \frac{1}{8192} ط = \frac{1}{8192} ط \text{ جب } \frac{1}{8192} ط - \frac{1}{16384} ط = \frac{1}{16384} ط \text{ جب } \frac{1}{16384} ط - \frac{1}{32768} ط = \frac{1}{32768} ط \text{ جب } \frac{1}{32768} ط - \frac{1}{65536} ط = \frac{1}{65536} ط \text{ جب } \frac{1}{65536} ط - \frac{1}{131072} ط = \frac{1}{131072} ط \text{ جب } \frac{1}{131072} ط - \frac{1}{262144} ط = \frac{1}{262144} ط \text{ جب } \frac{1}{262144} ط - \frac{1}{524288} ط = \frac{1}{524288} ط \text{ جب } \frac{1}{524288} ط - \frac{1}{1048576} ط = \frac{1}{1048576} ط \text{ جب } \frac{1}{1048576} ط - \frac{1}{2097152} ط = \frac{1}{2097152} ط \text{ جب } \frac{1}{2097152} ط - \frac{1}{4194304} ط = \frac{1}{4194304} ط \text{ جب } \frac{1}{4194304} ط - \frac{1}{8388608} ط = \frac{1}{8388608} ط \text{ جب } \frac{1}{8388608} ط - \frac{1}{16777216} ط = \frac{1}{16777216} ط \text{ جب } \frac{1}{16777216} ط - \frac{1}{33554432} ط = \frac{1}{33554432} ط \text{ جب } \frac{1}{33554432} ط - \frac{1}{67108864} ط = \frac{1}{67108864} ط \text{ جب } \frac{1}{67108864} ط - \frac{1}{134217728} ط = \frac{1}{134217728} ط \text{ جب } \frac{1}{134217728} ط - \frac{1}{268435456} ط = \frac{1}{268435456} ط \text{ جب } \frac{1}{268435456} ط - \frac{1}{536870912} ط = \frac{1}{536870912} ط \text{ جب } \frac{1}{536870912} ط - \frac{1}{1073741824} ط = \frac{1}{1073741824} ط \text{ جب } \frac{1}{1073741824} ط - \frac{1}{2147483648} ط = \frac{1}{2147483648} ط \text{ جب } \frac{1}{2147483648} ط - \frac{1}{4294967296} ط = \frac{1}{4294967296} ط \text{ جب } \frac{1}{4294967296} ط - \frac{1}{8589934592} ط = \frac{1}{8589934592} ط \text{ جب } \frac{1}{8589934592} ط - \frac{1}{17179869184} ط = \frac{1}{17179869184} ط \text{ جب } \frac{1}{17179869184} ط - \frac{1}{34359738368} ط = \frac{1}{34359738368} ط \text{ جب } \frac{1}{34359738368} ط - \frac{1}{68719476736} ط = \frac{1}{68719476736} ط \text{ جب } \frac{1}{68719476736} ط - \frac{1}{137438953472} ط = \frac{1}{137438953472} ط \text{ جب } \frac{1}{137438953472} ط - \frac{1}{274877906944} ط = \frac{1}{274877906944} ط \text{ جب } \frac{1}{274877906944} ط - \frac{1}{549755813888} ط = \frac{1}{549755813888} ط \text{ جب } \frac{1}{549755813888} ط - \frac{1}{1099511627776} ط = \frac{1}{1099511627776} ط \text{ جب } \frac{1}{1099511627776} ط - \frac{1}{2199023255552} ط = \frac{1}{2199023255552} ط \text{ جب } \frac{1}{2199023255552} ط - \frac{1}{4398046511104} ط = \frac{1}{4398046511104} ط \text{ جب } \frac{1}{4398046511104} ط - \frac{1}{8796093022208} ط = \frac{1}{8796093022208} ط \text{ جب } \frac{1}{8796093022208} ط - \frac{1}{17592186044416} ط = \frac{1}{17592186044416} ط \text{ جب } \frac{1}{17592186044416} ط - \frac{1}{35184372088832} ط = \frac{1}{35184372088832} ط \text{ جب } \frac{1}{35184372088832} ط - \frac{1}{70368744177664} ط = \frac{1}{70368744177664} ط \text{ جب } \frac{1}{70368744177664} ط - \frac{1}{140737488355328} ط = \frac{1}{140737488355328} ط \text{ جب } \frac{1}{140737488355328} ط - \frac{1}{281474976710656} ط = \frac{1}{281474976710656} ط \text{ جب } \frac{1}{281474976710656} ط - \frac{1}{562949953421312} ط = \frac{1}{562949953421312} ط \text{ جب } \frac{1}{562949953421312} ط - \frac{1}{1125899906842624} ط = \frac{1}{1125899906842624} ط \text{ جب } \frac{1}{1125899906842624} ط - \frac{1}{2251799813685248} ط = \frac{1}{2251799813685248} ط \text{ جب } \frac{1}{2251799813685248} ط - \frac{1}{4503599627370496} ط = \frac{1}{4503599627370496} ط \text{ جب } \frac{1}{4503599627370496} ط - \frac{1}{9007199254740992} ط = \frac{1}{9007199254740992} ط \text{ جب } \frac{1}{9007199254740992} ط - \frac{1}{18014398509481984} ط = \frac{1}{18014398509481984} ط \text{ جب } \frac{1}{18014398509481984} ط - \frac{1}{36028797018963968} ط = \frac{1}{36028797018963968} ط \text{ جب } \frac{1}{36028797018963968} ط - \frac{1}{72057594037927936} ط = \frac{1}{72057594037927936} ط \text{ جب } \frac{1}{72057594037927936} ط - \frac{1}{144115188075855872} ط = \frac{1}{144115188075855872} ط \text{ جب } \frac{1}{144115188075855872} ط - \frac{1}{288230376151711744} ط = \frac{1}{288230376151711744} ط \text{ جب } \frac{1}{288230376151711744} ط - \frac{1}{576460752303423488} ط = \frac{1}{576460752303423488} ط \text{ جب } \frac{1}{576460752303423488} ط - \frac{1}{1152921504606846976} ط = \frac{1}{1152921504606846976} ط \text{ جب } \frac{1}{1152921504606846976} ط - \frac{1}{2305843009213693952} ط = \frac{1}{2305843009213693952} ط \text{ جب } \frac{1}{2305843009213693952} ط - \frac{1}{4611686018427387904} ط = \frac{1}{4611686018427387904} ط \text{ جب } \frac{1}{4611686018427387904} ط - \frac{1}{9223372036854775808} ط = \frac{1}{9223372036854775808} ط \text{ جب } \frac{1}{9223372036854775808} ط - \frac{1}{18446744073709551616} ط = \frac{1}{18446744073709551616} ط \text{ جب } \frac{1}{18446744073709551616} ط - \frac{1}{36893488147419103232} ط = \frac{1}{36893488147419103232} ط \text{ جب } \frac{1}{36893488147419103232} ط - \frac{1}{73786976294838206464} ط = \frac{1}{73786976294838206464} ط \text{ جب } \frac{1}{73786976294838206464} ط - \frac{1}{147573952589676412928} ط = \frac{1}{147573952589676412928} ط \text{ جب } \frac{1}{147573952589676412928} ط - \frac{1}{295147905179352825856} ط = \frac{1}{295147905179352825856} ط \text{ جب } \frac{1}{295147905179352825856} ط - \frac{1}{590295810358705651712} ط = \frac{1}{590295810358705651712} ط \text{ جب } \frac{1}{590295810358705651712} ط - \frac{1}{1180591620717411303424} ط = \frac{1}{1180591620717411303424} ط \text{ جب } \frac{1}{1180591620717411303424} ط - \frac{1}{2361183241434822606848} ط = \frac{1}{2361183241434822606848} ط \text{ جب } \frac{1}{2361183241434822606848} ط - \frac{1}{4722366482869645213696} ط = \frac{1}{4722366482869645213696} ط \text{ جب } \frac{1}{4722366482869645213696} ط - \frac{1}{9444732965739290427392} ط = \frac{1}{9444732965739290427392} ط \text{ جب } \frac{1}{9444732965739290427392} ط - \frac{1}{18889465931478580854784} ط = \frac{1}{18889465931478580854784} ط \text{ جب } \frac{1}{18889465931478580854784} ط - \frac{1}{37778931862957161709568} ط = \frac{1}{37778931862957161709568} ط \text{ جب } \frac{1}{37778931862957161709568} ط - \frac{1}{75557863725914323419136} ط = \frac{1}{75557863725914323419136} ط \text{ جب } \frac{1}{75557863725914323419136} ط - \frac{1}{151115727451828646838272} ط = \frac{1}{151115727451828646838272} ط \text{ جب } \frac{1}{151115727451828646838272} ط - \frac{1}{302231454903657293676544} ط = \frac{1}{302231454903657293676544} ط \text{ جب } \frac{1}{302231454903657293676544} ط - \frac{1}{604462909807314587353088} ط = \frac{1}{604462909807314587353088} ط \text{ جب } \frac{1}{604462909807314587353088} ط - \frac{1}{1208925819614629174706176} ط = \frac{1}{1208925819614629174706176} ط \text{ جب } \frac{1}{1208925819614629174706176} ط - \frac{1}{2417851639229258349412352} ط = \frac{1}{2417851639229258349412352} ط \text{ جب } \frac{1}{2417851639229258349412352} ط - \frac{1}{4835703278458516698824704} ط = \frac{1}{4835703278458516698824704} ط \text{ جب } \frac{1}{4835703278458516698824704} ط - \frac{1}{9671406556917033397649408} ط = \frac{1}{9671406556917033397649408} ط \text{ جب } \frac{1}{9671406556917033397649408} ط - \frac{1}{19342813113834066795298816} ط = \frac{1}{19342813113834066795298816} ط \text{ جب } \frac{1}{19342813113834066795298816} ط - \frac{1}{38685626227668133590597632} ط = \frac{1}{38685626227668133590597632} ط \text{ جب } \frac{1}{38685626227668133590597632} ط - \frac{1}{77371252455336267181195264} ط = \frac{1}{77371252455336267181195264} ط \text{ جب } \frac{1}{77371252455336267181195264} ط - \frac{1}{154742504910672534362390528} ط = \frac{1}{154742504910672534362390528} ط \text{ جب } \frac{1}{154742504910672534362390528} ط - \frac{1}{309485009821345068724781056} ط = \frac{1}{309485009821345068724781056} ط \text{ جب } \frac{1}{309485009821345068724781056} ط - \frac{1}{618970019642690137449562112} ط = \frac{1}{618970019642690137449562112} ط \text{ جب } \frac{1}{618970019642690137449562112} ط - \frac{1}{1237940039285380274899124224} ط = \frac{1}{1237940039285380274899124224} ط \text{ جب } \frac{1}{1237940039285380274899124224} ط - \frac{1}{2475880078570760549798248448} ط = \frac{1}{2475880078570760549798248448} ط \text{ جب } \frac{1}{2475880078570760549798248448} ط - \frac{1}{4951760157141521099596496896} ط = \frac{1}{4951760157141521099596496896} ط \text{ جب } \frac{1}{4951760157141521099596496896} ط - \frac{1}{9903520314283042199192993792} ط = \frac{1}{9903520314283042199192993792} ط \text{ جب } \frac{1}{9903520314283042199192993792} ط - \frac{1}{19807040628566084398385987584} ط = \frac{1}{19807040628566084398385987584} ط \text{ جب } \frac{1}{19807040628566084398385987584} ط - \frac{1}{39614081257132168796771975168} ط = \frac{1}{39614081257132168796771975168} ط \text{ جب } \frac{1}{39614081257132168796771975168} ط - \frac{1}{79228162514264337593543950336} ط = \frac{1}{79228162514264337593543950336} ط \text{ جب } \frac{1}{79228162514264337593543950336} ط - \frac{1}{158456325028528675187087900672} ط = \frac{1}{158456325028528675187087900672} ط \text{ جب } \frac{1}{158456325028528675187087900672} ط - \frac{1}{316912650057057350374175801344} ط = \frac{1}{316912650057057350374175801344} ط \text{ جب } \frac{1}{316912650057057350374175801344} ط - \frac{1}{633825300114114700748351602688} ط = \frac{1}{633825300114114700748351602688} ط \text{ جب } \frac{1}{633825300114114700748351602688} ط - \frac{1}{1267650600228229401496703205376} ط = \frac{1}{1267650600228229401496703205376} ط \text{ جب } \frac{1}{1267650600228229401496703205376} ط - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} ط = \frac{1}{2535301200456458802993406410752} ط \text{ جب } \frac{1}{2535301200456458802993406410752} ط - \frac{1}{5070602400912917605986812821504} ط = \frac{1}{5070602400912917605986812821504} ط \text{ جب } \frac{1}{5070602400912917605986812821504} ط - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} ط = \frac{1}{10141204801825835211973625643008} ط \text{ جب } \frac{1}{10141204801825835211973625643008} ط - \frac{1}{20282409603651670423947251286016} ط = \frac{1}{20282409603651670423947251286016} ط \text{ جب } \frac{1}{20282409603651670423947251286016} ط - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} ط = \frac{1}{40564819207303340847894502572032} ط \text{ جب } \frac{1}{40564819207303340847894502572032} ط - \frac{1}{81129638414606681695789005144064} ط = \frac{1}{81129638414606681695789005144064} ط \text{ جب } \frac{1}{81129638414606681695789005144064} ط - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} ط = \frac{1}{162259276829213363391578010288128} ط \text{ جب } \frac{1}{162259276829213363391578010288128} ط - \frac{1}{324518553658426726783156020576256} ط = \frac{1}{324518553658426726783156020576256} ط \text{ جب } \frac{1}{324518553658426726783156020576256} ط - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} ط = \frac{1}{649037107316853453566312041152512} ط \text{ جب } \frac{1}{649037107316853453566312041152512} ط - \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} ط = \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} ط \text{ جب } \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} ط - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} ط = \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} ط \text{ جب } \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} ط - \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} ط = \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} ط \text{ جب } \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} ط - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} ط = \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} ط \text{ جب } \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} ط - \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} ط = \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} ط \text{ جب } \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} ط - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} ط = \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} ط \text{ جب } \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} ط - \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} ط = \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} ط \text{ جب } \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} ط - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} ط = \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} ط \text{ جب } \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} ط - \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} ط = \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} ط \text{ جب } \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} ط - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} ط = \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} ط \text{ جب } \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} ط - \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} ط = \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} ط \text{ جب } \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} ط - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} ط = \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} ط \text{ جب } \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} ط - \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} ط = \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} ط \text{ جب } \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} ط - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} ط = \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} ط \text{ جب } \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} ط - \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} ط = \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} ط \text{ جب } \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} ط - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} ط = \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} ط \text{ جب } \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} ط - \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} ط = \frac{1}{85070591730$$

$$= \frac{1 - \text{جم } ۲ ط}{۲ \text{ جب } ۲ ط - \text{جم } ۲ ط} = - \text{مم ط}$$

$$\therefore \text{قم ط} = \text{مم ط} - \frac{\text{جم ط}}{۲} \text{ اسی طرح قم } ۲ ط = \text{مم ط} - \text{جم } ۲ ط$$

$$\text{قم } ۳ ط = \text{مم } ۲ ط - \text{جم } ۳ ط \dots\dots\dots$$

$$\text{اور قم } ۱۰۰ ط = \text{مم } ۹۹ ط - \text{جم } ۱۰۰ ط$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{100} \text{قم } r ط = \text{مم } ۱ ط - \text{جم } ۱۰۰ ط$$

### سوالات نمبر ۱۲ (ب)

$$(۱) \text{ ثابت کرو کہ } \text{قم ط قم } ۲ ط = \text{قم ط} [ \text{مم ط} - \text{جم } ۲ ط ] \text{ وغیرہ}$$

$$\text{اور ان کے ذریعے بتاؤ کہ } \sum_{r=1}^n \text{قم } r ط = \text{قم ط} [ \text{مم } (n+1) ط - \text{جم } (n+1) ط ]$$

(۲) مندرجہ ذیل سلسلوں کی n رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو :-

$$(۱) \text{قم ط قم } ۲ ط + \text{قم } ۳ ط قم } ۵ ط + \dots\dots\dots$$

$$(۱۱) \text{جم ط جم } ۲ ط + \text{جم } ۲ ط جم } ۲ ط + \dots\dots\dots$$

$$(۱۱۱) \text{جم ط جب } ۲ ط + \text{جم } ۲ ط جب } ۳ ط + \dots\dots\dots$$

$$(د) \text{سلسلہ } ج \text{ جم } ۴ + ج \text{ جم } (۴ + ۵) + ج \text{ جم } (۴ + ۵ + ۶) + \dots$$

کی n رقموں کا حاصل جمع جبکہ ج، ح، ... ایک سلسلہ حسابیہ ہیں

$$\text{فرض کرو } س = ج \text{ جم } ۴ + ج \text{ جم } (۴ + ۵) + \dots\dots\dots$$

$$+ ج \text{ جم } (۴ + ۵ + ۶ + \dots + (n-1) + ۴)$$

$$\text{تب } ۲ \text{ جم بہ سن} = \text{ح} \cdot \{\text{جم} (\text{ع} + \text{بہ}) + \text{جم} (\text{ع} - \text{بہ})\}$$

$$+ \text{ح} \cdot \{\text{جم} (\text{ع} + ۲\text{بہ}) + \text{جم} \text{ع}\}$$

$$+ \text{ح} \cdot \{\text{جم} (\text{ع} + ۳\text{بہ}) + \text{جم} (\text{ع} + \text{بہ})\}$$

.....

$$+ \text{ح} \cdot \{\text{جم} (\text{ع} + \text{ن بہ}) + \text{جم} \{\text{ع} + (\text{ن} - ۲\text{بہ})\}\}$$

$$\therefore ۲ (۱ - \text{جم بہ}) \text{سن} = (\text{ح} - \text{ح} ۲) \cdot \text{جم} \text{ع}$$

$$+ (\text{ح} ۲ - \text{ح} - \text{ح} ۱) \cdot \text{جم} (\text{ع} + \text{بہ})$$

$$+ (\text{ح} ۲ - \text{ح} - \text{ح} ۱) \cdot \text{جم} (\text{ع} + ۲\text{بہ})$$

..... +

$$+ (\text{ح} ۲ - \text{ح} - \text{ح} ۱) \cdot \text{جم} \{\text{ع} + (\text{ن} - ۲\text{بہ})\}$$

$$+ (\text{ح} ۲ - \text{ح} - \text{ح} ۱) \cdot \text{جم} \{\text{ع} + (\text{ن} - ۱\text{بہ})\}$$

$$- \text{ح} \cdot \text{جم} (\text{ع} - \text{بہ}) - \text{ح} \cdot \text{جم} (\text{ع} + \text{ن بہ})$$

لیکن اگر ج، ح، ح ..... سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو

$$\text{ح} ۲ = \text{ح} ۱ + \text{ح} ۱ + ۱$$

$$\therefore ۲ (۱ - \text{جم بہ}) \text{سن} = (\text{ح} - \text{ح} ۲) \cdot \text{جم} \text{ع} + (\text{ح} ۲ - \text{ح} - \text{ح} ۱) \cdot \text{جم} \{\text{ع} + (\text{ن} - ۱\text{بہ})\}$$

$$- \text{ح} \cdot \text{جم} (\text{ع} - \text{بہ}) - \text{ح} \cdot \text{جم} (\text{ع} + \text{ن بہ})$$

جس سے سن کی قیمت برآمد ہو جاتی ہے۔

طالب علم کو چاہیے کہ اس طرح سلسلہ

$$\text{ح} \cdot \text{جب} \text{ع} + \text{ح} \cdot \text{جب} (\text{ع} + \text{بہ}) + \text{ح} \cdot \text{جب} (\text{ع} + ۲\text{بہ}) + \dots$$



کی ن رتوں کا مائل جمع دریافت کرے جبکہ ج، ح، ..... ایک سلسلہ حسابیہ ہو۔

### سوالات نمبر ۱۴ (ج)

مندرجہ ذیل سلسلوں کی ن رتوں کا مائل جمع دریافت کرو۔

$$(۱) \text{ جم } ۱ + \text{ جم } ۲ + \text{ جم } ۳ + \dots + \text{ جم } ۳۰$$

$$(۲) \text{ جب } ۱ + \text{ جب } ۲ + \text{ جب } ۳ + \dots + \text{ جب } ۳۰$$

$$(۳) \text{ جم } ۱ - \text{ جم } ۲ + \text{ جم } ۳ - \text{ جم } ۴ + \dots - \text{ جم } ۳۰$$

$$(۴) \text{ جب } ۱ - \text{ جب } ۲ + \text{ جب } ۳ - \text{ جب } ۴ + \dots - \text{ جب } ۳۰$$

(۵) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے پھیلاؤ زاویہ

کی صغریٰ قوتوں کے سلسلوں میں۔  
لا کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ۱ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۶} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{اور جم } ۱ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۶} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

ان مسائل کا مستند باضابطہ ثبوت ہا بسن (Hobson)

برام وچ (Bromwich) وغیرہ کی کتابوں میں درج ہے۔ ا بنرائی

احصار کے ذریعہ بھی ان کو ثابت کر سکتے ہیں لیکن طبیعیات کے طالب علم کے

لیے ایسی باضابطگی کی چنداں ضرورت نہیں ہے۔ اس لیے یہاں ڈی مو اور

کے مسئلہ کے ذریعہ ہی سرسری ثبوت پیش کیے جاتے ہیں :-

صفحہ ۸۹ پر فصل ۴۷ میں بتایا گیا ہے کہ

$$\text{جب } ۱ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۶} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

اور جم ن ط = جم ط -  $\frac{n(n-1)}{2}$  جب ط جم ط + ط + .....  
 اول الذکر سلسلہ کی رقموں کی تعداد  $\frac{1}{2}n$  ہے جبکہ ن ایک جفت عدد ہے  
 اور  $\frac{1}{2}(n+1)$  جبکہ ن طاق عدد ہے۔ آخر الذکر سلسلہ میں  $\frac{1}{2}n+1$   
 رقمیں ہیں جبکہ ن جفت عدد ہے اور  $\frac{1}{2}(n+1)$  جبکہ ن طاق ہے۔  
 پس جب ن ط = جم ط [ن مس ط -  $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$  مس ط + .....]  
 = جم ط [ن مس ط -  $\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n^2})}{3}$  (ن مس ط) + .....]  
 اور جم ن ط = جم ط [۱ -  $\frac{(1-\frac{1}{n})}{2}$  (ن مس ط)]  
 +  $\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n^3})}{2}$  (ن مس ط) + .....  
 فرض کرو کہ لا کوئی ایک مثبت عدد ہے اور ن ط = لا لکھو۔ تب  
 جب لا = جم  $\frac{1}{n}$  [ن مس  $\frac{1}{n}$  -  $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n^2})$  (ن مس  $\frac{1}{n}$ ) + .....] (۱)  
 اور جم لا = جم  $\frac{1}{n}$  [۱ -  $\frac{(1-\frac{1}{n})}{2}$  (ن مس  $\frac{1}{n}$ ) + .....]  
 +  $\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n^3})}{2}$  (ن مس  $\frac{1}{n}$ ) + ..... (۲)  
 لیکن  $\frac{لا}{لا} = ۱$   
 پس  $\frac{لا}{لا} = ۱$  (ن مس  $\frac{لا}{لا}$ )

اور  $n \rightarrow \infty$  نہیا  $(\frac{n}{n}) = 1$   
 [ اگرچہ واضح ہے کہ نہیا  $(\frac{n}{n}) = 1$  جبکہ  $n$  کوئی معین قیمت کا عدد ہے ]

نہیا  $(\frac{n}{n}) = 1$  ثبوت کا محتاج ہے -

$$\text{فرض کرو } 1 = \frac{n}{n} = (\frac{n}{n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{تب } 1 = \frac{n}{n} = \frac{n}{n} \text{ (جب } \frac{n}{n} \text{)}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ  $1 > \frac{n}{n} = \frac{(n-1)}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$  جبکہ  $1 > \frac{n}{n}$

$$1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \text{ جبکہ } 1 > \frac{n}{n}$$

$$\text{پس } 1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \text{ جبکہ } 1 > \frac{n}{n}$$

$$\therefore 1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \text{ (جب } \frac{n}{n} \text{)}$$

$$1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \text{ جبکہ } 1 > \frac{n}{n}$$

$$1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots \text{ چونکہ جب } 1 > \frac{n}{n}$$

اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ نہیا  $\frac{n}{n} = 1$  اور اس لیے نہیا  $1 = 1$

(و) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے

آئیلر (Euler) کے قوت نمائی جملے -

عدد  $n$  کی تعریف قوت نمائی سلسلہ  $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$

سے کی جا کر فصل (۳۴) میں (دیکھو صفحہ ۷۰) بتایا گیا ہے کہ جب لا کوئی ساقی  
عدد ہوتا ہے تو

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 1$$

اور یہ سلسلہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے مستحق ہوتا ہے  
اگر خیالی متغیر  $y = 1 + x$  استعمال کیا جاتا ہے تو سلسلہ

$$1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

$$1 + r + (r + x) + (r + x + x^2) + \dots$$

لکھا جاسکتا ہے جس میں

$$r = 1 + x + x^2 + \dots \text{ اور } x = \frac{1}{2}$$

پس سلسلہ  $1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$  کی ن قیمتوں کا حاصل جمع

$$[1 + r + (r + x) + (r + x + x^2) + \dots]$$

$$+ x + [r + (r + x) + (r + x + x^2) + \dots]$$

اوپر کے دونوں جملے  $r$  اور  $x$  کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہوتے ہیں۔ اس لیے  
ن قیمتوں کے حاصل جمع کی انتہا وجود رکھتی ہے اور سلسلہ

$$1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

کو  $y$  کی تعریف تصور کر سکتے ہیں، جبکہ  $y = 1 + x$  ما

$$\text{یعنی } 1 + x^2 = \frac{x^2}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{10} + \dots$$

$$\text{اور } 1 - x^2 = \frac{x^2}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{7} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{10} + \dots$$

$$\text{پس } 1 + x^2 = \left( \dots + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 1 \right) 2 = 2 - 2x^2$$

$$\text{اور } 1 - x^2 = \left( \dots + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 1 \right) 2 = 2 - 2x^2$$

$$\text{یعنی } 1 + x^2 = 2 - 2x^2 \text{ اور جب } 1 = 2 - 2x^2$$

پانچویں باب کے اکثر مسائل مندرجہ بالا روابط کی مدد سے بڑی آسانی کے ساتھ حل ہو سکتے تھے۔ لیکن طالب علم کی موجودہ حالت میں ان کا براہ راست بغیر مد خیالی مقادیر ثابت کرنا زیادہ سودمند ہے۔

جہاں 1 اور جب 1 کے لیے ابھی ابھی جو قوت نمائی جملے اخذ کیے گئے ہیں ان کی مدد سے باسانی بتایا جاسکتا ہے کہ زاویوں کے حاصل جمع یا حاصل تفرق کے مستدیر تفاعلوں کے ضابطے نہ صرف حقیقی زاویوں کے لیے صادق آتے ہیں بلکہ خیالی زاویوں پر بھی حاوی ہیں۔

$$\text{یعنی جب } (1 + 1) = \text{جب } 1 + \text{جب } 1$$

$$\text{جب } (1 - 1) = \text{جب } 1 - \text{جب } 1$$

$$\text{جب } (1 + 1) = \text{جب } 1 + \text{جب } 1$$

$$\text{جب } (1 - 1) = \text{جب } 1 - \text{جب } 1$$

ان کا ثبوت طالب علم کی مشق کے لیے اچھڑ دیا جاتا ہے۔ ثبوت میں فریز کر لیا جاسکتا ہے کہ رابطہ  $1 + 1 = 2$  اس صورت میں بھی صحیح ہے

جبکہ لا اور مالتف متادیر ہیں۔ اس طرح جو ضابطے جمع اور تفریق کے مسائل پر مبنی اور حقیقی زاویوں کے لیے ثابت ہو چکے ہیں ملتف متادیر کے لیے بھی صادق آتے ہیں۔

## ۷۔ زائدی تفاعیل۔

**تعریف۔** مقدار  $\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}$  خواہ ما حقیقی ہو یا ملتف ما کی زائدی جیب کہلاتی ہے اور جبر ما لکھی جاتی ہے۔

اسی طرح مقدار  $\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}$  ما کی زائدی جیب التمام کہلاتی ہے اور جبر ما لکھی جاتی ہے۔

وضیح ہو کہ زائدی مماس، قاطع، مماس التمام اور قاطع التمام زائدی جیب اور زائدی جیب التمام سے اس طرح حاصل کیے جاتے ہیں جیسا کہ معمولی مماس، قاطع، مماس التمام اور قاطع التمام معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$\text{چنانچہ مسزما} = \frac{\text{جبرما}}{\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}}$$

$$\text{قطرما} = \frac{1}{\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}} = \frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}$$

$$\text{مزمزما} = \frac{1}{\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}} = \frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}$$

$$\text{قزمزما} = \frac{1}{\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}} = \frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}$$

(۱) زائدی جیب التمام اور زائدی جیب کو قائم قطع زائد کے ساتھ دہری رابطہ و تعلق ہے جو معمولی مستدیر جیب التمام اور جیب کو دائرہ کے ساتھ ہے۔

واضح ہے کہ جبرما اور جبرما کی قیمتیں جب ما اور جم ما کے قوت نامی جملوں سے محض علامت خیالی (خ) متروک کر دینے سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۲) چونکہ  $خ^2 = 1$  لہذا  $جبرما خ = \frac{جوا خ + جوا خ}{2} = \frac{جوا خ + جوا خ}{2}$

$$جبرما = \frac{جوا + جوا}{2} = \frac{جوا + جوا}{2}$$

$$جبرما خ = \frac{جوا خ - جوا خ}{2} = \frac{جوا خ - جوا خ}{2}$$

$$جبرما خ = \frac{جوا - جوا}{2} = \frac{جوا - جوا}{2}$$

$$جبرما خ = \frac{جوا - جوا}{2} = \frac{جوا - جوا}{2}$$

یعنی  $جبرما (ما خ) = جبرما (ما خ) = خ جبرما اور مس (ما خ) = مسرما$

(۳) پس مصرعہ بالا روابط سے براہ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ جو کوئی عام ضابطہ زاویوں کی جیب التمام سے متعلق ہے اگر اس میں بجائے جم کے جبر لکھا جائے تو بھی صحیح رہیگا۔

نیز ہر وہ عام ضابطہ جس میں کسی زاویہ کی جیب التمام اور مربع جیب شامل ہیں صحیح ہے اگر جم کی بجائے جبر اور جب کی بجائے۔ جبر لکھا جائے۔ اسی طرح مس کے ضابطے بھی صحیح رہتے ہیں اگر مس کے عوض مسرما لکھا جائے۔

$$(۴) چونکہ جبرلا = \frac{1}{2}(جوا + جوا) اور جبرلا = \frac{1}{2}(جوا - جوا)$$

جوا اور جوا کو  $\frac{1}{2}$  کے موجب پھیلانے سے

$$جبرلا = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$\text{اور جبر لا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{2} + \frac{\text{لا}^4}{4} + \frac{\text{لا}^5}{5} + \dots$$

مثال (۱) جملہ مس (عہ + بہ خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علیحدہ کرو۔

$$\begin{aligned} \text{مس (عہ + بہ خ)} &= \frac{\text{جب (عہ + بہ خ)}}{\text{جم (عہ + بہ خ)}} \\ &= \frac{2 \text{ جب (عہ + بہ خ) جم (عہ - بہ خ)}}{2 \text{ جم (عہ + بہ خ) جم (عہ - بہ خ)}} \\ &= \frac{\text{جب ۲ عہ + جب ۲ بہ خ}}{\text{جم ۲ عہ + جم ۲ بہ خ}} \end{aligned}$$

مثال (۲) جملہ جمز (عہ + بہ خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علیحدہ کرو۔

$$\begin{aligned} \text{جمز (عہ + بہ خ)} &= \text{جم} \{ \text{عہ + بہ خ} \} = \text{جم (عہ - بہ خ)} \\ &= \text{جم (عہ خ) جم بہ + جب (عہ خ) جب بہ} \\ &= \text{جمز عہ جم بہ + خ جمز عہ جب بہ} \end{aligned}$$

### بہودھویں باب کی مثالیں

(۱) جم لا اور جب لا کے لیے قوت نمائی جملے استعمال کر کے مندرجہ ذیل ضابطے ثابت کرو لا اور ما حقیقی ہوں یا ملف

$$\begin{aligned} (ا) \text{ جم لا} &+ \text{جب لا} = ۱ \\ (ب) \text{ جم لا} &= \text{جم لا} - \text{جب لا} = ۱ - ۲ \text{ جب لا} \\ (ج) \text{ جب لا} &= ۳ \text{ جب لا} - ۲ \text{ جب لا} \\ (د) \text{ جم لا} - \text{جم ما} &= ۲ \text{ جب} \frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲} \text{ جب} \frac{\text{لا} - \text{ما}}{۲} \\ (ه) \text{ جب لا} - \text{جب ما} &= ۲ \text{ جم} \frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲} \text{ جب} \frac{\text{لا} - \text{ما}}{۲} \end{aligned}$$



(۲) ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} (۱) \text{ جمر (ع + ب)} &= \text{جمر ع جمر ب} + \text{جمر ع جمر ب} \\ (ب) \text{ جمر (ع + ب)} &- \text{جمر (ع - ب)} = ۲ \text{ جمر ع جمر ب} \\ (ج) \text{ جمر لا + جمر (لا + ۱)} &+ \text{جمر (لا + ۱۲)} + \dots + \text{ن رقموں تک} \\ &= \text{جمر (لا + لا - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰ - ۱۱ - ۱۲ - ۱۳ - ۱۴ - ۱۵ - ۱۶ - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰ - ۱۰۱ - ۱۰۲ - ۱۰۳ - ۱۰۴ - ۱۰۵ - ۱۰۶ - ۱۰۷ - ۱۰۸ - ۱۰۹ - ۱۱۰ - ۱۱۱ - ۱۱۲ - ۱۱۳ - ۱۱۴ - ۱۱۵ - ۱۱۶ - ۱۱۷ - ۱۱۸ - ۱۱۹ - ۱۲۰ - ۱۲۱ - ۱۲۲ - ۱۲۳ - ۱۲۴ - ۱۲۵ - ۱۲۶ - ۱۲۷ - ۱۲۸ - ۱۲۹ - ۱۳۰ - ۱۳۱ - ۱۳۲ - ۱۳۳ - ۱۳۴ - ۱۳۵ - ۱۳۶ - ۱۳۷ - ۱۳۸ - ۱۳۹ - ۱۴۰ - ۱۴۱ - ۱۴۲ - ۱۴۳ - ۱۴۴ - ۱۴۵ - ۱۴۶ - ۱۴۷ - ۱۴۸ - ۱۴۹ - ۱۵۰ - ۱۵۱ - ۱۵۲ - ۱۵۳ - ۱۵۴ - ۱۵۵ - ۱۵۶ - ۱۵۷ - ۱۵۸ - ۱۵۹ - ۱۶۰ - ۱۶۱ - ۱۶۲ - ۱۶۳ - ۱۶۴ - ۱۶۵ - ۱۶۶ - ۱۶۷ - ۱۶۸ - ۱۶۹ - ۱۷۰ - ۱۷۱ - ۱۷۲ - ۱۷۳ - ۱۷۴ - ۱۷۵ - ۱۷۶ - ۱۷۷ - ۱۷۸ - ۱۷۹ - ۱۸۰ - ۱۸۱ - ۱۸۲ - ۱۸۳ - ۱۸۴ - ۱۸۵ - ۱۸۶ - ۱۸۷ - ۱۸۸ - ۱۸۹ - ۱۹۰ - ۱۹۱ - ۱۹۲ - ۱۹۳ - ۱۹۴ - ۱۹۵ - ۱۹۶ - ۱۹۷ - ۱۹۸ - ۱۹۹ - ۲۰۰ - ۲۰۱ - ۲۰۲ - ۲۰۳ - ۲۰۴ - ۲۰۵ - ۲۰۶ - ۲۰۷ - ۲۰۸ - ۲۰۹ - ۲۱۰ - ۲۱۱ - ۲۱۲ - ۲۱۳ - ۲۱۴ - ۲۱۵ - ۲۱۶ - ۲۱۷ - ۲۱۸ - ۲۱۹ - ۲۲۰ - ۲۲۱ - ۲۲۲ - ۲۲۳ - ۲۲۴ - ۲۲۵ - ۲۲۶ - ۲۲۷ - ۲۲۸ - ۲۲۹ - ۲۳۰ - ۲۳۱ - ۲۳۲ - ۲۳۳ - ۲۳۴ - ۲۳۵ - ۲۳۶ - ۲۳۷ - ۲۳۸ - ۲۳۹ - ۲۴۰ - ۲۴۱ - ۲۴۲ - ۲۴۳ - ۲۴۴ - ۲۴۵ - ۲۴۶ - ۲۴۷ - ۲۴۸ - ۲۴۹ - ۲۵۰ - ۲۵۱ - ۲۵۲ - ۲۵۳ - ۲۵۴ - ۲۵۵ - ۲۵۶ - ۲۵۷ - ۲۵۸ - ۲۵۹ - ۲۶۰ - ۲۶۱ - ۲۶۲ - ۲۶۳ - ۲۶۴ - ۲۶۵ - ۲۶۶ - ۲۶۷ - ۲۶۸ - ۲۶۹ - ۲۷۰ - ۲۷۱ - ۲۷۲ - ۲۷۳ - ۲۷۴ - ۲۷۵ - ۲۷۶ - ۲۷۷ - ۲۷۸ - ۲۷۹ - ۲۸۰ - ۲۸۱ - ۲۸۲ - ۲۸۳ - ۲۸۴ - ۲۸۵ - ۲۸۶ - ۲۸۷ - ۲۸۸ - ۲۸۹ - ۲۹۰ - ۲۹۱ - ۲۹۲ - ۲۹۳ - ۲۹۴ - ۲۹۵ - ۲۹۶ - ۲۹۷ - ۲۹۸ - ۲۹۹ - ۳۰۰ - ۳۰۱ - ۳۰۲ - ۳۰۳ - ۳۰۴ - ۳۰۵ - ۳۰۶ - ۳۰۷ - ۳۰۸ - ۳۰۹ - ۳۱۰ - ۳۱۱ - ۳۱۲ - ۳۱۳ - ۳۱۴ - ۳۱۵ - ۳۱۶ - ۳۱۷ - ۳۱۸ - ۳۱۹ - ۳۲۰ - ۳۲۱ - ۳۲۲ - ۳۲۳ - ۳۲۴ - ۳۲۵ - ۳۲۶ - ۳۲۷ - ۳۲۸ - ۳۲۹ - ۳۳۰ - ۳۳۱ - ۳۳۲ - ۳۳۳ - ۳۳۴ - ۳۳۵ - ۳۳۶ - ۳۳۷ - ۳۳۸ - ۳۳۹ - ۳۴۰ - ۳۴۱ - ۳۴۲ - ۳۴۳ - ۳۴۴ - ۳۴۵ - ۳۴۶ - ۳۴۷ - ۳۴۸ - ۳۴۹ - ۳۵۰ - ۳۵۱ - ۳۵۲ - ۳۵۳ - ۳۵۴ - ۳۵۵ - ۳۵۶ - ۳۵۷ - ۳۵۸ - ۳۵۹ - ۳۶۰ - ۳۶۱ - ۳۶۲ - ۳۶۳ - ۳۶۴ - ۳۶۵ - ۳۶۶ - ۳۶۷ - ۳۶۸ - ۳۶۹ - ۳۷۰ - ۳۷۱ - ۳۷۲ - ۳۷۳ - ۳۷۴ - ۳۷۵ - ۳۷۶ - ۳۷۷ - ۳۷۸ - ۳۷۹ - ۳۸۰ - ۳۸۱ - ۳۸۲ - ۳۸۳ - ۳۸۴ - ۳۸۵ - ۳۸۶ - ۳۸۷ - ۳۸۸ - ۳۸۹ - ۳۹۰ - ۳۹۱ - ۳۹۲ - ۳۹۳ - ۳۹۴ - ۳۹۵ - ۳۹۶ - ۳۹۷ - ۳۹۸ - ۳۹۹ - ۴۰۰ - ۴۰۱ - ۴۰۲ - ۴۰۳ - ۴۰۴ - ۴۰۵ - ۴۰۶ - ۴۰۷ - ۴۰۸ - ۴۰۹ - ۴۱۰ - ۴۱۱ - ۴۱۲ - ۴۱۳ - ۴۱۴ - ۴۱۵ - ۴۱۶ - ۴۱۷ - ۴۱۸ - ۴۱۹ - ۴۲۰ - ۴۲۱ - ۴۲۲ - ۴۲۳ - ۴۲۴ - ۴۲۵ - ۴۲۶ - ۴۲۷ - ۴۲۸ - ۴۲۹ - ۴۳۰ - ۴۳۱ - ۴۳۲ - ۴۳۳ - ۴۳۴ - ۴۳۵ - ۴۳۶ - ۴۳۷ - ۴۳۸ - ۴۳۹ - ۴۴۰ - ۴۴۱ - ۴۴۲ - ۴۴۳ - ۴۴۴ - ۴۴۵ - ۴۴۶ - ۴۴۷ - ۴۴۸ - ۴۴۹ - ۴۵۰ - ۴۵۱ - ۴۵۲ - ۴۵۳ - ۴۵۴ - ۴۵۵ - ۴۵۶ - ۴۵۷ - ۴۵۸ - ۴۵۹ - ۴۶۰ - ۴۶۱ - ۴۶۲ - ۴۶۳ - ۴۶۴ - ۴۶۵ - ۴۶۶ - ۴۶۷ - ۴۶۸ - ۴۶۹ - ۴۷۰ - ۴۷۱ - ۴۷۲ - ۴۷۳ - ۴۷۴ - ۴۷۵ - ۴۷۶ - ۴۷۷ - ۴۷۸ - ۴۷۹ - ۴۸۰ - ۴۸۱ - ۴۸۲ - ۴۸۳ - ۴۸۴ - ۴۸۵ - ۴۸۶ - ۴۸۷ - ۴۸۸ - ۴۸۹ - ۴۹۰ - ۴۹۱ - ۴۹۲ - ۴۹۳ - ۴۹۴ - ۴۹۵ - ۴۹۶ - ۴۹۷ - ۴۹۸ - ۴۹۹ - ۵۰۰ - ۵۰۱ - ۵۰۲ - ۵۰۳ - ۵۰۴ - ۵۰۵ - ۵۰۶ - ۵۰۷ - ۵۰۸ - ۵۰۹ - ۵۱۰ - ۵۱۱ - ۵۱۲ - ۵۱۳ - ۵۱۴ - ۵۱۵ - ۵۱۶ - ۵۱۷ - ۵۱۸ - ۵۱۹ - ۵۲۰ - ۵۲۱ - ۵۲۲ - ۵۲۳ - ۵۲۴ - ۵۲۵ - ۵۲۶ - ۵۲۷ - ۵۲۸ - ۵۲۹ - ۵۳۰ - ۵۳۱ - ۵۳۲ - ۵۳۳ - ۵۳۴ - ۵۳۵ - ۵۳۶ - ۵۳۷ - ۵۳۸ - ۵۳۹ - ۵۴۰ - ۵۴۱ - ۵۴۲ - ۵۴۳ - ۵۴۴ - ۵۴۵ - ۵۴۶ - ۵۴۷ - ۵۴۸ - ۵۴۹ - ۵۵۰ - ۵۵۱ - ۵۵۲ - ۵۵۳ - ۵۵۴ - ۵۵۵ - ۵۵۶ - ۵۵۷ - ۵۵۸ - ۵۵۹ - ۵۶۰ - ۵۶۱ - ۵۶۲ - ۵۶۳ - ۵۶۴ - ۵۶۵ - ۵۶۶ - ۵۶۷ - ۵۶۸ - ۵۶۹ - ۵۷۰ - ۵۷۱ - ۵۷۲ - ۵۷۳ - ۵۷۴ - ۵۷۵ - ۵۷۶ - ۵۷۷ - ۵۷۸ - ۵۷۹ - ۵۸۰ - ۵۸۱ - ۵۸۲ - ۵۸۳ - ۵۸۴ - ۵۸۵ - ۵۸۶ - ۵۸۷ - ۵۸۸ - ۵۸۹ - ۵۹۰ - ۵۹۱ - ۵۹۲ - ۵۹۳ - ۵۹۴ - ۵۹۵ - ۵۹۶ - ۵۹۷ - ۵۹۸ - ۵۹۹ - ۶۰۰ - ۶۰۱ - ۶۰۲ - ۶۰۳ - ۶۰۴ - ۶۰۵ - ۶۰۶ - ۶۰۷ - ۶۰۸ - ۶۰۹ - ۶۱۰ - ۶۱۱ - ۶۱۲ - ۶۱۳ - ۶۱۴ - ۶۱۵ - ۶۱۶ - ۶۱۷ - ۶۱۸ - ۶۱۹ - ۶۲۰ - ۶۲۱ - ۶۲۲ - ۶۲۳ - ۶۲۴ - ۶۲۵ - ۶۲۶ - ۶۲۷ - ۶۲۸ - ۶۲۹ - ۶۳۰ - ۶۳۱ - ۶۳۲ - ۶۳۳ - ۶۳۴ - ۶۳۵ - ۶۳۶ - ۶۳۷ - ۶۳۸ - ۶۳۹ - ۶۴۰ - ۶۴۱ - ۶۴۲ - ۶۴۳ - ۶۴۴ - ۶۴۵ - ۶۴۶ - ۶۴۷ - ۶۴۸ - ۶۴۹ - ۶۵۰ - ۶۵۱ - ۶۵۲ - ۶۵۳ - ۶۵۴ - ۶۵۵ - ۶۵۶ - ۶۵۷ - ۶۵۸ - ۶۵۹ - ۶۶۰ - ۶۶۱ - ۶۶۲ - ۶۶۳ - ۶۶۴ - ۶۶۵ - ۶۶۶ - ۶۶۷ - ۶۶۸ - ۶۶۹ - ۶۷۰ - ۶۷۱ - ۶۷۲ - ۶۷۳ - ۶۷۴ - ۶۷۵ - ۶۷۶ - ۶۷۷ - ۶۷۸ - ۶۷۹ - ۶۸۰ - ۶۸۱ - ۶۸۲ - ۶۸۳ - ۶۸۴ - ۶۸۵ - ۶۸۶ - ۶۸۷ - ۶۸۸ - ۶۸۹ - ۶۹۰ - ۶۹۱ - ۶۹۲ - ۶۹۳ - ۶۹۴ - ۶۹۵ - ۶۹۶ - ۶۹۷ - ۶۹۸ - ۶۹۹ - ۷۰۰ - ۷۰۱ - ۷۰۲ - ۷۰۳ - ۷۰۴ - ۷۰۵ - ۷۰۶ - ۷۰۷ - ۷۰۸ - ۷۰۹ - ۷۱۰ - ۷۱۱ - ۷۱۲ - ۷۱۳ - ۷۱۴ - ۷۱۵ - ۷۱۶ - ۷۱۷ - ۷۱۸ - ۷۱۹ - ۷۲۰ - ۷۲۱ - ۷۲۲ - ۷۲۳ - ۷۲۴ - ۷۲۵ - ۷۲۶ - ۷۲۷ - ۷۲۸ - ۷۲۹ - ۷۳۰ - ۷۳۱ - ۷۳۲ - ۷۳۳ - ۷۳۴ - ۷۳۵ - ۷۳۶ - ۷۳۷ - ۷۳۸ - ۷۳۹ - ۷۴۰ - ۷۴۱ - ۷۴۲ - ۷۴۳ - ۷۴۴ - ۷۴۵ - ۷۴۶ - ۷۴۷ - ۷۴۸ - ۷۴۹ - ۷۵۰ - ۷۵۱ - ۷۵۲ - ۷۵۳ - ۷۵۴ - ۷۵۵ - ۷۵۶ - ۷۵۷ - ۷۵۸ - ۷۵۹ - ۷۶۰ - ۷۶۱ - ۷۶۲ - ۷۶۳ - ۷۶۴ - ۷۶۵ - ۷۶۶ - ۷۶۷ - ۷۶۸ - ۷۶۹ - ۷۷۰ - ۷۷۱ - ۷۷۲ - ۷۷۳ - ۷۷۴ - ۷۷۵ - ۷۷۶ - ۷۷۷ - ۷۷۸ - ۷۷۹ - ۷۸۰ - ۷۸۱ - ۷۸۲ - ۷۸۳ - ۷۸۴ - ۷۸۵ - ۷۸۶ - ۷۸۷ - ۷۸۸ - ۷۸۹ - ۷۹۰ - ۷۹۱ - ۷۹۲ - ۷۹۳ - ۷۹۴ - ۷۹۵ - ۷۹۶ - ۷۹۷ - ۷۹۸ - ۷۹۹ - ۸۰۰ - ۸۰۱ - ۸۰۲ - ۸۰۳ - ۸۰۴ - ۸۰۵ - ۸۰۶ - ۸۰۷ - ۸۰۸ - ۸۰۹ - ۸۱۰ - ۸۱۱ - ۸۱۲ - ۸۱۳ - ۸۱۴ - ۸۱۵ - ۸۱۶ - ۸۱۷ - ۸۱۸ - ۸۱۹ - ۸۲۰ - ۸۲۱ - ۸۲۲ - ۸۲۳ - ۸۲۴ - ۸۲۵ - ۸۲۶ - ۸۲۷ - ۸۲۸ - ۸۲۹ - ۸۳۰ - ۸۳۱ - ۸۳۲ - ۸۳۳ - ۸۳۴ - ۸۳۵ - ۸۳۶ - ۸۳۷ - ۸۳۸ - ۸۳۹ - ۸۴۰ - ۸۴۱ - ۸۴۲ - ۸۴۳ - ۸۴۴ - ۸۴۵ - ۸۴۶ - ۸۴۷ - ۸۴۸ - ۸۴۹ - ۸۵۰ - ۸۵۱ - ۸۵۲ - ۸۵۳ - ۸۵۴ - ۸۵۵ - ۸۵۶ - ۸۵۷ - ۸۵۸ - ۸۵۹ - ۸۶۰ - ۸۶۱ - ۸۶۲ - ۸۶۳ - ۸۶۴ - ۸۶۵ - ۸۶۶ - ۸۶۷ - ۸۶۸ - ۸۶۹ - ۸۷۰ - ۸۷۱ - ۸۷۲ - ۸۷۳ - ۸۷۴ - ۸۷۵ - ۸۷۶ - ۸۷۷ - ۸۷۸ - ۸۷۹ - ۸۸۰ - ۸۸۱ - ۸۸۲ - ۸۸۳ - ۸۸۴ - ۸۸۵ - ۸۸۶ - ۸۸۷ - ۸۸۸ - ۸۸۹ - ۸۹۰ - ۸۹۱ - ۸۹۲ - ۸۹۳ - ۸۹۴ - ۸۹۵ - ۸۹۶ - ۸۹۷ - ۸۹۸ - ۸۹۹ - ۹۰۰ - ۹۰۱ - ۹۰۲ - ۹۰۳ - ۹۰۴ - ۹۰۵ - ۹۰۶ - ۹۰۷ - ۹۰۸ - ۹۰۹ - ۹۱۰ - ۹۱۱ - ۹۱۲ - ۹۱۳ - ۹۱۴ - ۹۱۵ - ۹۱۶ - ۹۱۷ - ۹۱۸ - ۹۱۹ - ۹۲۰ - ۹۲۱ - ۹۲۲ - ۹۲۳ - ۹۲۴ - ۹۲۵ - ۹۲۶ - ۹۲۷ - ۹۲۸ - ۹۲۹ - ۹۳۰ - ۹۳۱ - ۹۳۲ - ۹۳۳ - ۹۳۴ - ۹۳۵ - ۹۳۶ - ۹۳۷ - ۹۳۸ - ۹۳۹ - ۹۴۰ - ۹۴۱ - ۹۴۲ - ۹۴۳ - ۹۴۴ - ۹۴۵ - ۹۴۶ - ۹۴۷ - ۹۴۸ - ۹۴۹ - ۹۵۰ - ۹۵۱ - ۹۵۲ - ۹۵۳ - ۹۵۴ - ۹۵۵ - ۹۵۶ - ۹۵۷ - ۹۵۸ - ۹۵۹ - ۹۶۰ - ۹۶۱ - ۹۶۲ - ۹۶۳ - ۹۶۴ - ۹۶۵ - ۹۶۶ - ۹۶۷ - ۹۶۸ - ۹۶۹ - ۹۷۰ - ۹۷۱ - ۹۷۲ - ۹۷۳ - ۹۷۴ - ۹۷۵ - ۹۷۶ - ۹۷۷ - ۹۷۸ - ۹۷۹ - ۹۸۰ - ۹۸۱ - ۹۸۲ - ۹۸۳ - ۹۸۴ - ۹۸۵ - ۹۸۶ - ۹۸۷ - ۹۸۸ - ۹۸۹ - ۹۹۰ - ۹۹۱ - ۹۹۲ - ۹۹۳ - ۹۹۴ - ۹۹۵ - ۹۹۶ - ۹۹۷ - ۹۹۸ - ۹۹۹ - ۱۰۰۰$$

$$\begin{aligned} (۳) \text{ اگر جب (۲ + خ ب)} &= \text{لا + خ ما تو ثابت کرو کہ} \\ \frac{\text{لا}}{\text{جمر ب}} + \frac{\text{ما}}{\text{جمر ب}} &= ۱ \text{ اور } \frac{\text{لا}}{\text{جمر ب}} - \frac{\text{ما}}{\text{جمر ب}} = ۱ \\ (۴) \text{ اگر مس (۲ + خ ب)} &= \text{لا + خ ما تو ثابت کرو کہ} \\ \text{لا} + \text{ما} + ۲ \text{ لا مم} &= ۱ \text{ اور لا} + \text{ما} - ۲ \text{ مم} = ۱ \\ (۵) \text{ ثابت کرو کہ} & \end{aligned}$$

$$(۱) \frac{۱}{۴} (\text{جمر لا + جب لا}) = \text{لا} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۹} + \dots + \text{تا بہ لاتنا ہی}$$

$$(ب) \frac{۱}{۴} (\text{جمر لا + جم لا}) = ۱ + \frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۸} + \dots + \text{تا بہ لاتنا ہی}$$

# جوابات

## نصاب ذیلی ریاضی

### حصہ اول

#### پہلا باب (۱)

(۱) چوتھی اور پانچویں رقم - قیمت =  $\frac{6}{134}$   
۲۴۷۲ (۳)

ایضاً (ب)

(۱) مثبت تقسری رقم سے شروع ہوتا ہے۔  
(۲) آٹھویں رقم

(۳)  $-\frac{19412}{3}$

ایضاً (ج)

(۱) ۱۰۰۰۰۹۹۹ (۲) ۰۰۰۰۰۹۹۵

(۳)  $\frac{1}{3} - \frac{5}{9}$  (۴)  $1 - \frac{323}{120}$

(۶) صفر

دوسرا باب (۱)  $\frac{1}{u^2-1} + \frac{3}{u^2-1}$  (۲)  $\frac{9}{2(u-1)} - \frac{5}{2(u-1)}$

(۳)  $\frac{1}{(1+u)^2} - \frac{9+u^4}{(5+u^2+u^4)^2}$

$$\frac{1 - 2v - u}{(1 + u - 2v - u^2) 2v^2} - \frac{1 - 2v + u}{(1 + u - 2v + u^2) 2v^2} \quad (۳)$$

$$\frac{1^3}{(3-u)^2} + \frac{6}{(3-u)^2} - \frac{1}{(1+u)^2} \quad (۵)$$

$$\frac{1}{v(u^2+1)^2} - \frac{1}{(u^2+1)^2} + \frac{1}{u^2-1} \quad (۶)$$

$$\frac{2+u}{(1+u^2)^2} + \frac{2}{(2-u)^2} + \frac{2}{2(2-u)} \quad (۷)$$

$$\frac{1^2}{(2+u)^2} + \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{2u^2} \quad (۸)$$

$$\frac{2}{3(2+u)^2} + \frac{1}{2(2+u)} +$$

$$(2+u^2) \frac{1}{9} - 1+u \left( \frac{1}{2} - \right) - \frac{2}{9} \quad (۱۰)$$

تیسرا باب (۱) ۴ (۲) ۵۰۴۰ (۳) ۲۰۴۰۰ (۴) ۳

(۵) ا ب ج + ۲ ف گ ح - ا ف - ب گ - ج ح

(۶) ۲ ا ا ا ج ج ج + ا ا ب ب ج ج + ا ا ب ب ج ج

- ا ج ج - ا ج ج - ا ب ج ج - ا ب ج ج

$$\frac{211}{203} = 1 \frac{11}{203} = 1 \frac{11}{203} \quad (۱۰)$$

$$\frac{1}{21} = 1 \frac{18}{21} = 1 \frac{22}{21} \quad (۱۱)$$

$$2:3 = 3:4 \quad 0 = 0 \quad 0 = 0 \quad (۱۲)$$

$$10 \frac{1}{2} = 6 \frac{1}{2} \quad 2 \frac{1}{2} = 2 \frac{1}{2} \quad 0 = 0 \quad (۱۴)$$

چوتھا باب (۱) ۱۱۳۶۶۷۷۷ پونڈ (۳) ۴۲ پونڈ ۱۹ شلنگ ۶ پنس  
(۵) ۸۵ پونڈ ۱۰ شلنگ (۶) ۱۹۷۹ پونڈ ۵ شلنگ ۶ پنس  
(۷) ۱۷۳۵ پونڈ تقریباً

پانچواں باب (ف)  $\pm$  جم  $\frac{1}{10}$   $\pm$  خ جب  $\frac{1}{10}$   
جم  $\frac{1}{10}$   $\pm$  خ جب  $\frac{1}{10}$  - ۱

ساتواں باب (۲) [۳]  $۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۴۰$

(ب)  $۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۴۰$

(ج)  $۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۴۰$

بارہواں باب (۱) [۲] خط مکانی محور کا ڈھال  $\frac{1}{10}$  راس  $(\frac{1}{10} - \frac{1}{10})$

(ب) خط زائد مرکز  $(\frac{1}{10} - \frac{1}{10})$  محوروں کے ڈھال ۱ اور ۱

(ج) خط ناقص مرکز  $(\frac{1}{10} - \frac{1}{10})$  محوروں کے ڈھال  $\frac{1}{10}$  اور  $\frac{1}{10}$

(د) دو خطوط مستقیم جو نقطہ  $(\frac{1}{10} - \frac{1}{10})$  پر متقاطع ہوتے ہیں

اور جن کے ڈھال  $\frac{1}{10}$  اور  $\frac{1}{10}$  ہیں۔

[۴]  $۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ = ۴۰$

تیرہواں باب (۱) [۲] ۲۵۲۳۱۷ (ب) ۱۷۱۴۸۷

(ج) ۲۵۵۷۷

[۲] - ۵۲۸۴۶ - [۳] ۱۷۱۲۷ اور ۸۷۸۷۳

[۴]  $\frac{1}{10} - \frac{1}{10} = ۰$

[۵] (۱) ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵ - ۵

(ب) ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰

(ج) ۸ - ۸ - ۸ - ۸ - ۸ - ۸ - ۸ - ۸ - ۸ - ۸

چودھواں باب - ۱ [۱] (۱)  $\frac{\text{جم (ن+۱) ط جب ن ط}}{\text{جب ط}}$

(ب)  $\frac{\text{جب (ب) } \left( \frac{\text{ن+۱}}{\text{ط}} \right) \text{ ط جب } \frac{\text{ن ط}}{\text{ط}}}{\text{جب } \frac{\text{ط}}{\text{ط}}}$

[۲] (۱)  $\frac{\text{جم } \left\{ \frac{\text{ن-۱}}{\text{ط}} + \frac{\text{ن+۱}}{\text{ط}} \right\} \text{ جب } \frac{\text{ن (ن+۱)}}{\text{ط}}}{\text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}}}$

(ب)  $\frac{\text{جب } \left\{ \frac{\text{ن-۱}}{\text{ط}} + \frac{\text{ن+۱}}{\text{ط}} \right\} \text{ جب } \frac{\text{ن (ن+۱)}}{\text{ط}}}{\text{جم } \frac{\text{ط}}{\text{ط}}}$

[۳] (۱)  $\frac{\text{جم (ن+۱) ط جب ن ط}}{\text{جب ط}} + \frac{\text{ن}}{\text{ط}}$

(ب)  $\frac{\text{جم (ن+۱) ط جب ن ط}}{\text{جب ط}} - \frac{\text{ن}}{\text{ط}}$

ب [۲] (۱)  $\frac{\text{مم ط - مم (ن+۱) ط}}{\text{جب ط}}$

(۲)  $\frac{\text{جم (ن+۱) ط جب ن ط}}{\text{جب ط}} + \text{ن جم ط}$

(۳)  $\frac{\text{ن جب ط + جب (ن+۱) ط جب ن ط}}{\text{جب ط}}$

ج (۱)  $\frac{\text{ن } \frac{\text{ن+۱}}{\text{ط}} \text{ ط جب } \frac{\text{ن+۱}}{\text{ط}} - \frac{\text{ط}}{\text{ط}}}{(۱-جم ط)^۲}$

(۲)  $\frac{\text{ن جم } \frac{\text{ن+۱}}{\text{ط}} \text{ ط}}{\text{جب ط}}$

$$\frac{\{ \text{جم } n ط + \text{جم } (n+1) ط \} \cdot n^{1-n} + 1 - (3)}{(1 + \text{جم } ط)^2} - (3)$$

$$\frac{n \text{ جب } \frac{1+n^2}{2} ط}{\text{جم } \frac{ط}{2}} \quad (3) \quad n^{1-n}$$



# فہرست اصطلاحات

## نصاب ریاضی (حصہ اول)

انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Co-axial	ہم محور	<b>A</b>	
Coelement	سہ	Annuity	سالیانہ
Complex	ملطف	Arithmetic mean	} حسابی اوسط
Conic	مخروطی	(A. M.)	
Conic section	تراش مخروط	Asymptote	تقارب
Conjugate	مزدوج	Axis	محور
Consistent	باثبات	<b>B</b>	
Corollary	نتیجہ صریح	Binomial theorem	مسئلہ ثنائی
Cosecant	قاطع التمام	Bromwich	برام وچ
Cosine	جیب التمام	<b>C</b>	
Cotangent	ماس التمام	Cardan	کارڈان
Cotes	کوٹیز	Cartesian	کارٹیس
Critical	فاصل	Cauchy	کوشی
Cubic	کعبی	Chord	وتر
Curve	منحنی	Circumference	محیط
Cyclic	دائری	Clausius	کلاؤسیوس



انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Focus	ماسک	<b>D</b>	
<b>G</b>		D'Alembert	ڈالمبرٹ
General equation	عام مساوات	DeMoivre	ڈی مو اور
Geometric mean {	ہندسی اوسط {	Denominator	نسب نما
(G.M.)		Determinant	مقطعہ
<b>H</b>		Dimensions	ابعاد
Harmonic mean		Director circle	میرتب دائرہ
(H. M.)	موسیقی اوسط {	Directrix	میرتب
Hobson	ہابسن	<b>E</b>	
Horner	ہورنر	Eccentricity	خروج المركز
Hyperbola	قطع زائد - زائد	Elements	اجزائے ترکیبی
Hyperbolic function	زائدی تفاعل {	Eliminant	مسقط - حاصل استقاط
<b>I</b>		Elimination	استقاط
Imaginary	خیالی	Ellipse	قطع ناقص - ناقص
Index	قوت نما	Equimultiples	اضعاف متساویہ
Infinity	لاتناہی	Euler	آئیلر
Intercept	مقطوعہ	Even	جفت
<b>L</b>		Expansion	پھیلاؤ
Latus rectum	وتر خاص	Exponential theorem	مسئلہ قوت نما {
Limit	نہایت - نہا	<b>F</b>	
Locus	طریق	Factorial	ضربی
<b>M</b>			

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Quotient	خارج قسمت	Major axis	اعظم محور - محورِ اکبر
		Mantissa	اعشاریہ لوگاریتمی
		Minor axis	اقل محور - محورِ اصغر
Radical axis	بنیادی محور	Modulus	مقیاس
Radius vector	نیم قطر سمتی		
Real	حقیقی	N	نماد - معین
Rectangular hyperbola	فائق زائد	Normal	شمار کنندہ
Rhombus	معین	Numerator	عددی
		Numerical	عددی
		O	طاق
Sarrus	سارس	Odd	رتبہ
Secant	قاطع	Order	مبدأ
Series	سلسلہ	Origin	خطِ مکانی - مکانی
Sine	جیب	Parabola	متوازی الاضلاع
Suffix	علامت زیرین - لاحقہ	Parallelogram	جزوی کسر
System of circles	دائروں کا نظام	Partial fraction	عمود
		Perpendicular	قطبی
Tangent	ماس	Polar	قطبی محور
Trigonometrical	مثلثی	Polar co-ordinate	قطب
		Pole	کثیر رقمی
Unity	ایکانی	Polynomial	ظن
Unknown	نامعلوم - مجهول	Projection	

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
X-axis	محور X	Vector Value	مقدار
Y		W	
Y-axis	محور Y	Whole number	صحیح عدد
Z		X	
Zero	صفر		

# اغلاط نا

## نصاب ریاضی

(برائے طبیعیات بی۔ اے)

صحیح	غلط	نمبر	نمبر	صحیح	غلط	نمبر	نمبر
سس	سس	۱۳	۲۰	لا-۱	لا-۱	۱	۲
دو تین.....	دو تین	۱۸	"	ن ج	ن ج	۹	۵
ن + (ن)	ن × (ن)	۶	۲۱	$+\left(\frac{۳۶}{۳۲}\right)$	$+\left(\frac{۲۹}{۳۲}\right)$	۹۲۱۳	۱۱۵
پ-۱	پ+۱	۱۴	۲۱	$\frac{۲۱}{۸}$	$\frac{۲۱}{۸}$	۱۶	۱۵
پ-۲	پ-۲	۱۶	۲۱	$(۲-\frac{۴}{۲})$	$(۲-\frac{۴}{۲})$	۸	۱۶
پ	پ	۱۴	"	$\frac{۱۰۰۳۳}{۱۰۰۳۳}$	$\frac{۱۰۰۳۳}{۱۰۰۳۳}$	۱۵	"
(۲+۲)	(۲+۲)	۵	۲۲	$\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)$	$\frac{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)$	۳	۱۷
۱- (۱-)	۱+ (۱+)	"	"	$\frac{۱۱}{۲}$	$\frac{۱۱}{۲}$	۸	۱۷
۱۲+ (۲+۲)	۱۲- (۲+۲)	۶	۲۲	ن-۱+۲	ن- (۱+)	۱۷	۱۷
ض	ض	۲۵	۲۳	لا ۳	لا ۳	۶	۲۰
+ لا ۳	+ لا ۳	۱۸	۲۴	+ لا ۳	+ لا ۳	۷	"
ض	ض	۲۵	۲۵	ج ۳	ج ۳	۸	"
+ لا ۳	+ لا ۳	۹	"	+ لا ۳	+ لا ۳	۱۰	"

صحیح	غلط	نمبر	نمبر	صحیح	غلط	نمبر	نمبر
ج	(ج)	۱۰	۴۷	(+ ۶ لا)	(+ ۶ لا)	۱۵	۲۵
+ ۳۶ -	+ ۲۶ -	۱۹	۴۹	ض	ض	۲۶	۲۶
+ ۳ لا +	+ ۳ لا +	۷	۵۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۱۲	۲۶
لا	لا	۱۰	"	اس کے	اس کے	۳	۲۸
لا لا لا	لا لا لا	۲۰	"	یعنی	یعنی	۴	"
+ لا لا لا	+ لا لا لا	۲۰	"	استعمال	استعمال	۶	"
لا لا لا	لا لا لا	۲۱	"	جزوی	جزوی	۷	"
ج ج ج	ج ج ج	"	"	اجزائے ضربی	اجزائے ضربی	۱۷	"
- ج ج ج	- ج ج ج	۱	۵۲	اور ہمیں	اور ہمیں	۲۲	"
(ج ج ج ج)	(ج ج ج ج)	۹	"	کو	کو	۱۳	۲۹
ج = ج	ج = ج	۱۶	"	(ا ب)	(ا ب)	۱۴	"
- ج ج -	- ج ج -	۱۰	۵۳	قیمتیں تعین	قیمتیں تعین	۱۶	"
ج ج ج	ج ج ج	۱۲	"	تفاعل	تفاعل	۱	۳۰
زائد	زائد	۲۱	۵۳	(+ ۳ لا)	(+ ۳ لا)	۶	۳۲
لا	لا	۵	۵۴	$\frac{ن}{ن}$	$\frac{ن}{ن}$	۸	"
ج ج ج ج	ج ج ج ج	۶	"	(+ ۵ ب)	(+ ۵ ب)	۱۶	"
ج ج ج ج	ج ج ج ج	"	"	خ	خ	۴	۳۳
ساوی اضلاع	ساوی اضلاع	۱۳	"	لا - لا	لا - لا	۸	۳۶
۳ ۱ ۷	۳ ۱ ۷	۲۲	۵۷	کسر = لا	کسر = لا	۱۰	"
لا لا لا	لا لا لا	۴	۵۹	مثال (۲)	مثال (۲)	۱۱	"
لا لا لا	لا لا لا	۱۱	"	صعودی	صعودی	۹	۳۷
سابق	سابق	۲۱	۶۰	(۱ -)	(۱ -)	۱۸	۴۰
+ و +	+ و +	۲۳	"	لا =	لا =	۵	۴۷

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
جس	جس	۳۲	۱۳۲	۳ - لام =	۳ - لام =	۱	۶۲
مساوات	مساوات	۱	۱۳۳	۱۱	۱۱ -	۲	۶۲
عہ	عہ	شکل	۱۳۴	۳ - لام =	۳ - لام =	۳	۶۹
آء جمع طہ	لا بجم طہ	۱	۱۳۵	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	۲	۶۹
لنقطہ	فقطہ	۲۰	۱۳۰	ن (ن - ۱)	ن (ن - ۱)	۱۶	۷۰
لا عم	لا عم	۱۸	۱۳۹	حدراً	حدراً	۱۰	۷۲
۲ گ + لا	۲ گ + لا	۱۲	۱۶۱	(۱ -)	(۱ -)	۱۳	۷۲
(۴) (۲ گ +)	(۴) (۲ گ +)	۱۹	۱۶۲	$6 + \frac{2}{3}$	$6 + \frac{2}{3}$	۲	۷۵
گرتا ہے	گرتا ہے	۲۲	۱۶۴	محبوب	محبوب	۱۹	۷۷
تغیر	تغیر	۱۶	۱۷۱	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{29}$	۱۷	۷۶
جاسکتی	جاسکتی	۲۱	۱۷۲	$\frac{1}{2(1-2)}$	$\frac{1}{2(1-2)}$	۲۰	۷۷
یہ اے	یہ اے	۲	۱۷۷	رقمیں	رقمیں	۱۱	۷۷
مکانی	مکانی	$\frac{12}{8}$	$\frac{183}{189}$	۳۳۳۰۱۰۳	۳۳۳۰۱۰۳	۱۶	۷۸
میں	میں	۱۲	۱۸۶	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۷	۸۶
مراجہ =	مراجہ =	۱۷	۱۹۱	ج =	ج =	۱۰	۸۸
یعنی لا (لا = لا)	یعنی لا (لا = لا)	۱۲	۱۹۲	(ج + ج + ج)	(ج + ج + ج)	۱۵	۸۸
۲	۲	۶	۱۹۳	۳ - جب طہ	۳ - جب طہ	۱۳	۹۱
۱ - ۱	۱ - ۱	۲۱	۱۹۴	۲ - جب طہ =	۲ - جب طہ =	۲۰	۹۶
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			ن (۱ -)	ن (۱ -)	۱۳	۱۰۳
منطبق	منطبق	۱۸	۱۹۶	ضعف	ضعف	۱۳	۱۰۸
فہ، فہ	فہ، فہ	۱۷	۱۹۹	لا	لا	۷	۱۳۹
$\frac{لا}{۲}$	$\frac{لا}{۲}$	۶	۲۰۱	۲ + ج + ج	۲ + ج + ج	۲۱	۱۴۰
۱ =	۱ =	۸	۲۰۲	۲ گ -	(۲ گ -)	۱۹	۱۴۲

غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح
خط	خطہ	۱	۲۳۶	ق	ق	۲۰۶	شکل
ب ج =	ب ج =	۱۸	۲۳۴	ب	ب	۲۱۰	شکل ۳۶
بقدر م	بقدر م	۲۲	۲۵۹	$\frac{ب}{ا}$	$\frac{ب}{ا}$	۲	۲۱۲
یعنی لا	یعنی لا	۸	۲۶۰	ج ف سے	ج ف سے	۱	۲۱۵
سے	سے	۲	۲۶۱	ساوات (۴) سے	ساوات (۴) سے	۲۲	۲۱۰
(۴-)	(۴)	۸	۲۶۲	مستنبط	مستنبط	۱۷	۲۲۲
۶۳۹۳۳۰۰۰	۶۳۹۳۳۰۰۰	۱۹	۲۶۵	$\frac{ا}{لا}$	$\frac{ا}{لا}$	۹	۲۲۵
۶۹۳۹۶	۶۹۲۹۶	۲۹	"	بجاء	بجاء	۱۹	۲۲۵
غلط ۶۸۱۷۱۸۷۵۳۳۰۰۰	صحیح ۶۸۲۷۱۸۷۵۳۳۰۰۰	۳۷	"	را	را	۵	۲۲۹
$\frac{۱}{۲} + ۱$	$\frac{۱}{۳} + ۱$	۱۷	۲۸۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱۲	۲۳۰
جز (لا + ا) +	جز (لا + ا) +	۲	۲۸۶	پہنچتی	پہنچتی	۸	۲۳۳
				ج ت ا	ج ت ا	۱۵	۲۳۵

